Conferentie na de peilingen

wiskunde

Basisonderwijs
Secundair onderwijs - eerste graad - B-stroom
Secundair onderwijs - eerste graad - A-stroom



HET VERSCHIL IN WISKUNDE

de Factorij, Schaarbeek

2 maart 2011

Conferentiemap

Ministerie van Onderwijs en Vorming

Agentschap voor Kwaliteitszorg
in Onderwijs en Vorming

Algemene inhoudstafel

Hieronder vindt u een algemene inhoudstafel. Aan het begin van elk hoofdstuk vindt u een gedetailleerde inhoudstafel voor dat hoofdstuk.

I - Inleiding

Vlaanderen koos voor ontwikkelingsdoelen en eindtermen die sinds 1997-1998 van kracht zijn in het secundair onderwijs en sinds 1998-1999 in het basisonderwijs. Eindtermen zijn minimumdoelen die de overheid bereikbaar acht voor een bepaalde leerlingengroep; ontwikkelingsdoelen zijn minimumdoelen die de overheid wenselijk acht voor een bepaalde groep van leerlingen. De scholen hebben de opdracht om alle ontwikkelingsdoelen bij hun leerlingen in de B-stroom na te streven. Ze hebben met andere woorden een inspanningsverplichting. Dit in tegenstelling tot eindtermen, waarvoor de scholen een resultaatsverplichting hebben, in het basisonderwijs en in de eerste graad A-stroom. Eindtermen en ontwikkelingsdoelen zijn belangrijke kwaliteitsnormen van het Vlaamse onderwijssysteem.

Om de kwaliteit van het Vlaams onderwijs te evalueren, te bewaken en mogelijk te verbeteren, wil de overheid op niveau van het onderwijssysteem weten in welke mate de leerlingen de eindtermen of ontwikkelingsdoelen beheersen. Daarom moet de overheid beschikken over betrouwbare en objectieve prestatiegegevens van leerlingen. Om die informatie te verzamelen heeft de overheid in 2002 een systeem van periodieke peilingen ingevoerd. Peilingen passen in ons systeem voor externe en interne kwaliteitszorg. Ze bieden beleidsrelevante informatie en leerkansen voor overheid en scholen.

Peilingen geven een antwoord op de volgende onderzoeksvragen:

- In welke mate hebben de leerlingen in het Vlaams onderwijs (en het Nederlandstalig onderwijs in Brussel) de eindtermen of ontwikkelingsdoelen bereikt op het einde van een bepaald onderwijsniveau? Welke eindtermen/ontwikkelingsdoelen zitten goed? Met welke minimumdoelen hebben ze het moeilijk?
- Zijn er systematische verschillen tussen scholen in het percentage leerlingen dat de eindtermen/ontwikkelingsdoelen haalt? Blijven die verschillen bestaan wanneer rekening gehouden wordt met hun leerlingenpopulatie?
- Presteren alle leerlingen even goed? In welke mate hangen prestatieverschillen samen met bepaalde leerling-, klas- of schoolkenmerken?
- Presteren leerlingen bij een herhalingspeiling beter of minder goed dan bij een eerdere peiling?

Om na te gaan of leerlingen de eindtermen of ontwikkelingsdoelen beheersen, wordt bij de peilingen gewerkt met meetschalen. Dit zijn toetsladders waarop de opgaven geordend zijn in toenemende moeilijkheid. Een toetsnorm geeft aan tot waar een leerling op de toetsladder moet klimmen om de eindtermen te beheersen. De toetsnorm wordt bepaald door een groep deskundigen uit alle geledingen van het betrokken onderwijsniveau: leerkrachten, directies, lerarenopleiders, pedagogische begeleiders, onderwijsinspecteurs en beleidsmedewerkers. De toetsnorm maakt een onderscheid tussen basisopgaven (die de leerlingen moeten beheersen om de ontwikkelingsdoelen of eindtermen te bereiken) en bijkomende opgaven (die verder gaan dan wat de overheid van alle leerlingen vraagt).

Om de resultaten van opeenvolgende peilingen op een betrouwbare wijze te kunnen vergelijken, worden nieuw ontwikkelde opgaven op de oorspronkelijke meetschaal gepast. De meeste opgaven uit de eerste peiling worden bij een herhalingspeling ook opnieuw afgenomen als ankeropgave.

Inmiddels hebben reeds vier wiskundepeilingen plaatsgevonden in Vlaanderen. Bij de eerste peiling in het basisonderwijs in 2002 werd de beheersing van een groot aantal eindtermen wiskunde onderzocht. In 2009 vond een herhalingspeiling plaats zodat een vergelijking gemaakt kan worden met de resultaten op de eerste peiling. In 2008 werd een peiling wiskunde in de B-stroom van de eerste graad secundair onderwijs afgenomen en in 2009 was de A-stroom van de eerste graad aan de beurt. We beschikken dus over de wiskunderesultaten van het basisonderwijs en van de A- en de B-stroom van de eerste graad. In al deze peilingen samen werden heel wat wiskundetoetsen afgenomen bij duizenden leerlingen, daarnaast vulden deze leerlingen, hun leerkrachten, directies en ouders achtergrondvragenlijsten in over zichzelf, over de lessen wiskunde en over de school. Dit biedt een massa aan interessante informatie die kan helpen om een discussie over het wiskundecurriculum tot 14 jaar genuanceerd te voeren.

Om die discussie te voeden, werden in deze conferentiemap de belangrijkste bevindingen uit de peilingen gebundeld. Daarnaast werden de peilingsresultaten gelegd naast resultaten van andere onderzoeken uit binnen- en buitenland. Dit wordt af en toe geïllustreerd met vrijgegeven voorbeeldopgaven uit Vlaamse of Nederlandse peilingen, of uit ander onderzoek. Op die manier reiken we bijkomende referentiegegevens aan om de peilingsresultaten ruimer te interpreteren. Er werd ook gezocht naar wetenschappelijk onderzoek en voorbeelden uit andere landen die eventueel oplossingen kunnen aanreiken voor vastgestelde knelpunten.

Elk hoofdstuk bevat tevens een of meer bijdragen van andere onderwijspartners: onderzoekers, pedagogisch begeleiders, tijdschriftauteurs, onderwijsinspecteurs, St.A.M., …. Uit al deze informatie zullen de belangrijkste elementen voor het kwaliteitsdebat op de conferentie worden gedistilleerd.

In hoofdstuk II wordt ‘probleemoplossen’ belicht. Dit domein is expliciet opgenomen in de eindtermen van het basisonderwijs, maar is minder uitgesproken aanwezig in de ontwikkelingsdoelen en de eindtermen van de eerste graad in het secundair onderwijs.

In hoofdstuk III worden de resultaten voor domein ‘meten en meetkunde’ vergeleken met de bevindingen van peilingsonderzoek in Nederland.

In hoofdstuk IV wordt ‘gerekend’. De resultaten van de leerlingen op een internationaal vergelijkend onderzoek in dit domein worden besproken. Leerlingen leren in het basisonderwijs aanvankelijk rekenen met natuurlijke getallen, later ook met kommagetallen en positieve breuken. In het secundair onderwijs moeten leerlingen leren rekenen met negatieve en met reële getallen, en met onbekenden. Met de jaren wordt het rekenwerk abstracter.

Hoofdstuk V gaat dieper in op deze ‘abstractie’ die leerlingen in hun basisvorming wiskunde doorlopen. In het begin van het basisonderwijs ligt de klemtoon steeds op concrete leerinhouden, later moeten leerlingen geleidelijk leren loskomen van de tastbare werkelijkheid. Gebeurt de overgang van rekenen naar algebra te bruusk?

Het laatste hoofdstuk belicht uitgebreid de prestatieverschillen tussen groepen van leerlingen. De Vlaamse overheid kiest voor een beleid dat gericht is op het bevorderen van gelijke onderwijskansen. Slaagt het Vlaamse onderwijs erin om de wiskundige talenten van elke leerling te laten ontplooien?

Meer dan een decennium geleden stemde het Vlaamse Parlement de eindtermen en ontwikkelingsdoelen van wiskunde. Uit vier grootschalige peilingen leren we hoever we staan in de realisatie van deze minimumdoelen. Er zijn belangrijke vaststellingen gedaan. Ze vormen stof tot nadenken voor al wie bij het wiskundeonderwijs betrokken is. Ligt de lat te hoog, te laag, of juist goed voor wiskunde? Moeten we ervoor zorgen dat meer leerlingen de minimumdoelen bereiken? En hoe kan de overgang van basisonderwijs naar secundair onderwijs verbeterd worden? Moeten er andere accenten in het curriculum gelegd worden? Zijn er aanpassingen nodig aan eindtermen, leerplannen, didactisch materiaal, lerarenopleiding, nascholing begeleiding, inspectie, schoolbeleid? Moet er ingezet worden op de ondersteuning van specifieke doelgroepen? Deze conferentiemap wil een vertrekpunt bieden voor een kwaliteitsdebat dat leidt tot aanbevelingen voor verbeteracties.

II - Probleemoplossen

"Wil het onderwijs kinderen binnen die snel evoluerende maatschappij zelfredzaam maken, dan zal voor het leergebied wiskunde de nadruk liggen op het ontwikkelen van vaardigheden die kunnen helpen bij het oplossen van (nieuwe) problemen. Voorts moet men er rekening mee houden dat op school en daarbuiten het (leren) problemen oplossen plaatsvindt in een sociale context. Van kinderen zowel als volwassenen wordt dan ook verwacht dat ze onderling met elkaar kunnen samenwerken. (Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, 1995, P. 101)"

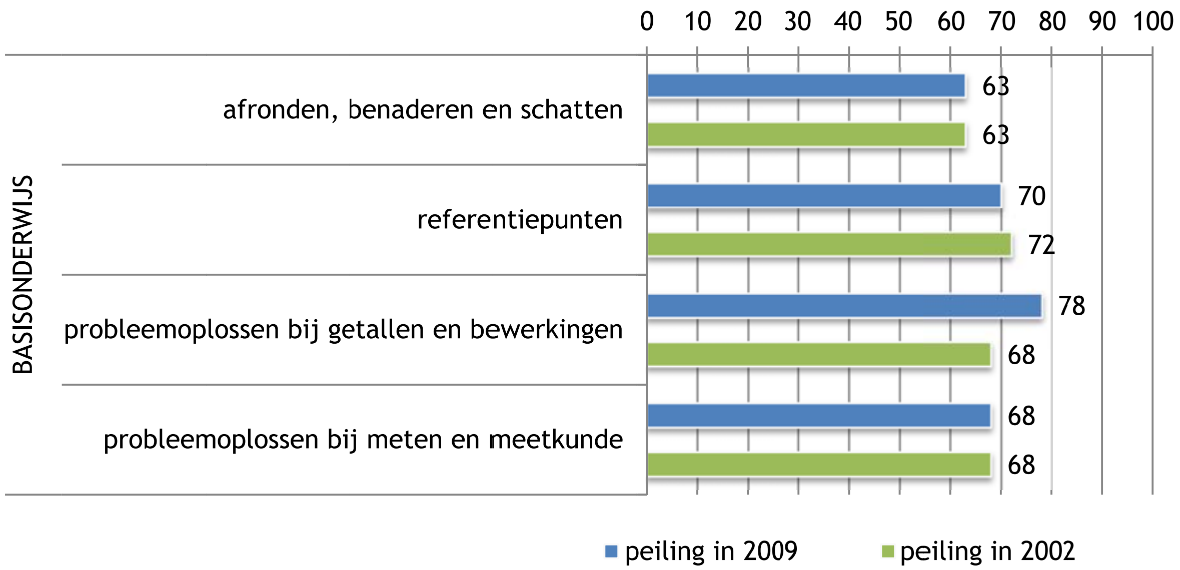
Inhoudstafel

1 Peilingsresultaten

Hierna staan de resultaten op peilingstoetsen waarin eindtermen en ontwikkelingsdoelen over probleemoplossen aan bod kwamen. De bijlage bevat een volledig overzicht van de getoetste eindtermen en ontwikkelingsdoelen in de drie afgenomen peilingen. Alle eindtermen die in elke wiskundetoets werden gepeild, staan in de bijlage.

Ongeveer twee derde tot drie vierde van de leerlingen in het basisonderwijs beheerst de eindtermen die verband houden met probleemoplossen. In 2002 waren de eindtermen rond probleemoplossen bij getallen en bewerkingen en bij meten en meetkunde vernieuwend. Toch haalde toen ook al twee derde van de leerlingen deze eindtermen. In 2009 is er een grote vooruitgang voor probleemoplossen bij getallen en bewerkingen.

De peilingstoetsen geven geen eenduidig antwoord op de vraag hoeveel leerlingen in het secundair onderwijs beschikken over probleemoplossende vaardigheden. Dit werd niet systematisch onderzocht, hoewel leerlingen in verschillende toetsen toch wel problemen moesten oplossen. Op basis van die opgaven kunnen er een aantal conclusies getrokken worden.



Figuur 2.1: Peilingsresultaten voor Vlaamse eindtermen eindtermen over probleemoplossen

In de A-stroom bijvoorbeeld, bij de toets ‘bewerkingen’, blijkt dat leerlingen eenvoudige rekenvraagstukken in een betekenisvolle context beter oplossen dan kale rekenoefeningen, en dat twee derde van de leerlingen procentberekeningen kan gebruiken in zinvolle contexten. Leerlingen lijken, bij de toets ‘algebraïsering’, redelijk te slagen in het oplossen van een eenvoudig vraagstuk dat te herleiden is tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende, maar het is niet duidelijk of ze bij hun oplossingen wel vergelijkingen opstellen. Meetkundige vraagstukken waar voor de oplossing meerdere denkstappen nodig zijn en waarbij er een combinatie voorkomt van verschillende figuren (opgaven die opgenomen waren bij de toets ‘meetkundige procedures: rekenen’), lukken niet goed voor de leerlingen van de A-stroom.

In de B-stroom presteren leerlingen vaak minder goed op rekenopgaven die peilen naar toepassing in praktische situaties of zinvolle contexten. Contexten maken een probleem voor deze leerlingen soms moeilijker. Bij opgaven die meerdere denk- of oplossingsstappen vereisen, liggen de scores vaak lager. Leerlingen lezen de vraag vaak niet goed en geven antwoorden op (andere) vragen die niet gesteld werden. Dit komt bijvoorbeeld tot uiting in de toets ‘functioneel rekenen in praktische situaties’. Toepassingen over ‘geld’ kunnen de leerlingen uit de B-stroom meestal wel goed oplossen.

Uit de peilingen van de A- en B-stroom blijkt dat leerlingen betere resultaten behalen als hun leerkrachten aangeven dat de leerlingen tijdens de lessen wiskunde vaker zelf problemen moeten oplossen. In het basisonderwijs heeft het zelf oplossen van vraagstukjes een positief effect op de score.

2 Reflectie over de resultaten door AKOV

2.1 De theorie over probleemoplossende vaardigheden

In deze paragraaf volgt een kort overzicht van de theorie over probleemoplossende vaardigheden: een omschrijving van het begrip *probleem*, een methode om problemen op te lossen en factoren die het probleemoplossend denken positief en negatief beïnvloeden.

2.1.1 Wat is een probleem?

Volgens Charles en Lester (1982) zijn oefeningen die in wiskunde als 'problemen' omschreven worden en die de probleemoplossende vaardigheden van leerlingen bevorderen, oefeningen waarvan leerlingen een juiste oplossingsmethode niet onmiddellijk kennen. Leerlingen kunnen met andere woorden de oplossing van de opdracht niet onmiddellijk neerschrijven. Wel moeten ze in staat zijn om zelf een oplossing van het probleem te vinden. Daarbij is het belangrijk dat de opgave uitdagend en aantrekkelijk is, waardoor leerlingen gemotiveerd zijn om de oplossing van de opdracht te vinden en hiervoor eventueel meerdere pogingen willen ondernemen.

Een probleem is een moeilijk te omschrijven begrip omdat het erg subjectief van aard is. Een bepaalde wiskundige opgave is voor leerling A misschien heel eenvoudig, terwijl dezelfde opgave voor leerling B erg moeilijk kan zijn. Anderzijds kan een vraagstuk aanvankelijk een probleem zijn, maar na verloop van tijd zal het probleemkarakter verloren gaan omdat de leerling weet dat hij naar een vergelijking moet zoeken. Het opstellen van die vergelijking kan dan wel nog problematisch zijn…

Charles en Lester (1982) onderscheiden vier verschillende soorten problemen:

- vertaalproblemen (de opgave van het probleem moet vertaald worden in een vergelijking, een stelsel...)
- toepassingsproblemen (problemen verbonden met de realiteit)
- puzzelproblemen
- procesproblemen (opgaven waarbij het denk- /zoekproces centraal staat).

Vooral bij het oplossen van procesproblemen is het gebruik van specifieke zoekstrategieën (heuristieken) essentieel.

2.1.2 Hoe problemen oplossen?

George Pólya (1945, 1990) onderscheidde vier fasen bij het aanpakken van een probleem. De fasen die volgens hem bij het oplossen van een probleem opeenvolgend doorlopen worden, zijn de *analysefase*, de *planning*, de *uitwerking van het probleem* en tot slot de *verificatiefase*. Het kan nodig zijn deze cyclus halverwege te onderbreken om terug te keren naar een vorige stap.

Analyse

De leerling probeert in deze fase de opgave te analyseren om de probleemsituatie goed te begrijpen. Het is belangrijk dat de leerling tot een goede mentale voorstelling kan komen van wat er gegeven is, wat er gezocht wordt en welke relaties er bestaan tussen de gegevens onderling en tussen de gegevens en het gezochte. Op het einde van de analysefase moeten leerlingen in staat zijn om het probleem in eigen woorden te formuleren.

Planning

Deze fase is belangrijk bij het oplossen van procesproblemen en steunt op het gebruik van heuristieken of zoekstrategieën. Leerlingen moeten het probleem mathematiseren. Hierbij wordt de opgave omgezet in wiskundige verbanden, symbolen of formules. Het schematisch opstellen van een passend oplossingsplan is in deze fase van groot belang. Soms zullen leerlingen in deze fase tot de vaststelling komen dat het probleem onvoldoende geanalyseerd werd en dat ze tijdelijk terug moeten keren naar de vorige fase.

Uitwerking

Het oplossingsplan wordt uitgevoerd. In deze fase stellen leerlingen eventueel tabellen op, worden berekeningen gemaakt en wordt een antwoord op de vraag geformuleerd. Ook hier zal geregeld blijken dat het nodig is om even terug te keren naar een vorige fase.

Verificatie

Het antwoord moet steeds gecontroleerd en geëvalueerd worden. Het moet ook op zijn juistheid getoetst worden door het op zinvolheid te beoordelen. Leerlingen controleren in deze fase of de correcte berekeningen werden uitgevoerd en of die berekeningen foutloos werden gemaakt. Maar verificatie betekent meer dan dat: in deze fase is het ook belangrijk om te kijken naar andere oplossingsmethoden die bij het probleem aangewend kunnen worden. Dit kan bijvoorbeeld door oplossingsmethoden van verschillende leerlingen klassikaal te bespreken en te vergelijken.

2.1.3 Heuristieken

Heuristieken zijn verstandige zoekstrategieën om problemen op te lossen. Het zijn vuistregels en raadgevingen waarmee een probleem kan worden aangepakt. Ze geven geen garantie op het vinden van de oplossing, maar ze vergroten wel de kans. Enkele voorbeelden van heuristieken zijn: maak een tekening, splits het probleem op in deelproblemen, zoek een patroon, los een gemakkelijker, verwant probleem op, werk omgekeerd en elimineer het onmogelijke.

Heuristieken spelen vooral een rol in de tweede fase van het oplossingsproces: de planningsfase. In deze fase moet een leerling een oplossingsplan bedenken waarbij beslist wordt welke zoekstrategie hulp kan bieden bij het gegeven probleem. Soms kan een heuristiek ook al handig zijn in de analysefase (eerste fase). Het maken van een tekening kan bijvoorbeeld nuttig zijn om een probleem te begrijpen.

Volgens Pólya (1945, 1990) is het beschikken over probleemoplossende vaardigheden geen aangeboren eigenschap, maar iets dat aangeleerd kan worden. Dit geldt zeker voor heuristieken.

2.1.4 Andere factoren bij het oplossen van problemen

Het toepassen van het oplossingsproces van Pólya en het gebruik van zoekstrategieën is volgens Stewart (1990) niet voldoende om een probleem te kunnen oplossen. De kandidaat-probleemoplosser moet volgens Stewart een soort intuïtie ontwikkelen die hem doet aanvoelen of hij al dan niet op de juiste weg is. Andere bronnen (Schoenfeld (1995), Verschaffel e.a. (1998), Jacobs e.a. (2005)) geven aan dat, naast het gebruik van heuristische methoden, onder andere inhoudelijke kennis, het kunnen sturen van het zoekproces en een positieve houding belangrijk zijn bij het oplossen van problemen. Deze aspecten worden hier uitgewerkt.

Cognitieve factoren

Cognitieve factoren hebben te maken met de *kennis* van de probleemoplosser. Om problemen met wiskunde op te lossen, moet een probleemoplosser over twee soorten kennis beschikken: wiskundige kennis en ervaringskennis.

De wiskundige kennis is ruimer dan de kennis van feiten, symbolen, definities, formules, algoritmen, begrippen, wetten en regels uit het wiskundig vakgebied. Ook de logische bekwaamheid, de rekenvaardigheid en de capaciteit van het geheugen behoren tot die categorie. Een probleemoplosser moet over een goed georganiseerd en flexibel toegankelijk kennisbestand beschikken.

Ervaringskennis is een essentiële voorwaarde om de context van een probleem te begrijpen. Ze helpt bij het selecteren van aspecten die nodig zijn om een wiskundig model op te stellen. Daarnaast stelt ze leerlingen in staat de oplossing van een probleem te interpreteren en te controleren. Leerlingen die bij een vraagstuk de prijs van een kilo aardappelen moeten berekenen en een uitkomst van 20 euro vinden, mogen wel beseffen dat hun oplossing niet kan kloppen.

Metacognitieve kennis en vaardigheden

Metacognitieve kennis houdt de kennis in die een leerling heeft over de eigen aard en de beperkingen van het eigen cognitief systeem en het eigen intellectueel functioneren. Een voorbeeld van metacognitieve kennis is weten dat de capaciteit van je kortetermijngeheugen beperkt is, of weten hoe je zelf het liefst en meest efficiënt te werk gaat. Zo kan de ene leerling een meetkundig probleem handig oplossen op een analytische manier, terwijl de andere leerling liever synthetisch werkt.

De metacognitieve vaardigheden worden gebruikt om het eigen denk- en leerproces te sturen. Onder deze vaardigheden worden het oriënteren, plannen, onder controle houden, evalueren en indien nodig bijsturen van een oplossingsproces en het gegeven antwoord verstaan. De metacognitieve vaardigheden komen tussen in elke fase van een probleemoplossingsproces en zijn dan ook essentieel. Het vergelijken van verschillende oplossingen en oplossingsmethoden stimuleert de ontwikkeling van metacognitieve vaardigheden

Houding tegenover wiskunde

De manier waarop een leerling naar de oplossing van een wiskundig probleem zoekt, wordt beïnvloed door de houding ten opzichte van het vak. Sommige leerlingen gebruiken hun wiskundige kennis niet omdat ze niet echt geloven in de bruikbaarheid ervan. Andere leerlingen geven het zoeken snel op omdat ze weinig vertrouwen hebben in een goede afloop, of omdat ze weinig doorzettingsvermogen hebben.

2.2 Meten contextvragen en kale opgaven dezelfde wiskundige activiteit?

In het huidige wiskundeonderwijs is het gebruik van contexten wijd verspreid. Woodward (2004) geeft hier drie redenen voor: werken met contexten motiveert leerlingen meer, het maakt het gemakkelijker om transfer naar het dagelijkse leven te maken (zeker voor de minder sterke leerlingen) en het zorgt voor een positievere attitude tegenover wiskunde. Maar: bij test-items kunnen contexten zorgen voor extra moeilijkheden. De leerlingen moeten immers twee extra stappen zetten: het mathematiseren van de opgave en het de-mathematiseren van het berekende resultaat.

Abedi (2000) geeft aan dat taal een invloed kan hebben op de wiskundeprestaties van leerlingen. Bij contextvragen speelt taal een grotere rol dan bij kale opgaven. Andere factoren dan wiskundige bekwaamheid kunnen een rol spelen bij het oplossen van een contextvraag. (Abedi en Lord, 2001). Prenger (2006) en van den Boer (2003) tonen aan dat immigranten minder goed presteren in wiskunde omwille van taalfactoren.

Van Nijlen (2010) onderzocht bij leerlingen van het BVL of contextvragen en kale opgaven dezelfde wiskundige activiteit meten. Hij bestuurde hiervoor de antwoorden van 1004 leerlingen op 56 vragen uit de peilingstoets van de B-stroom. Alle vragen behandelden het onderwerp 'hoofdbewerkingen'. 28 vragen waren kaal, zonder context, en leerlingen mochten hierbij geen rekenmachine gebruiken. De andere 28 opgaven waren contextvragen. Leerlingen mochten bij het oplossen hiervan een rekenmachine gebruiken.

Van Nijlen kwam tot de conclusie dat contextvragen iets minder goed opgelost worden dan kale oefeningen, hoewel er veel minder blanco antwoorden zijn bij contextoefeningen als bij kale oefeningen. Verder was de correlatie tussen de resultaten op beide testen eerder laag, wat wijst op het meten van verschillende factoren. Ongeveer een derde van de leerlingen scoorde beter op kale vragen dan op contextvragen, een ander derde loste contextvragen beter op dan kale opgaven en voor een laatste derde van de leerlingen maakte het geen verschil uit. De leerlingen die goed presteren op contextopgaven zijn dus andere dan de leerlingen die goed presteren op kale opgaven. Met andere woorden: kale opgaven en contextopgaven meten niet dezelfde wiskunde.

Bij een verdere analyse van de resultaten splitste Van Nijlen de deelnemende leerlingen op in drie deelgroepen. Tot de eerste deelgroep behoort 50% van de leerlingen. Deze leerlingen losten kale opgaven beter op dan contextoefeningen. Zij losten contextopgaven ook minder goed op dan de tweede groep. Meisjes hebben meer kans om tot deze groep te horen dan jongens.

De tweede deelgroep bestaat uit 27% van de leerlingen. Deze leerlingen losten contextvragen beter op dan kale vragen. Opvallend is dat deze leerlingen de eerste helft van de kale opgaven even goed oplosten als de leerlingen van de eerste deelgroep. Daarna beantwoordden zij heel wat kale opgaven niet meer. Waarschijnlijk beheersen ze de bewerkingen even goed als de eerste deelgroep, maar ontbreekt het hen aan motivatie om deze opgaven op te lossen. De sterkste leerlingen behoren dan ook waarschijnlijk tot deze groep. Een jongen heeft meer kans om tot deze groep te behoren dan een meisje, en een leerling met dyslexie ook.

De derde deelgroep, met 23% leerlingen, is de minst sterke groep. Deze leerlingen losten kale vragen én contextvragen het slechtste op. Voor sommige opgaven is er een groot verschil met andere leerlingen, vooral bij staartdelingen. Deze leerlingen lijken ook weinig gemotiveerd om kale opgaven op te lossen. Ze geven vaak een blanco antwoord, maar het is ook mogelijk dat handmatig rekenen te moeilijk is voor hen. Contextvragen lossen ze beter op dan kale vragen. Leerlingen die minder goed kunnen lezen, hebben een grotere kans om tot deze groep te behoren.

2.3 Probleemoplossen in het basisonderwijs

Het basisonderwijs investeert sinds de invoering van de eindtermen in probleemoplossende vaardigheden. De peilingstoetsen over het oplossen van problemen in het basisonderwijs geven aan dat deze vernieuwende eindtermen goed opgenomen zijn in het basisonderwijs. Mogelijk heeft dat te maken met een stimulans uit wetenschappelijke hoek. Verschaffel e.a. (1998) deden op het einde van de jaren '90 onderzoek naar hoe leerlingen in de derde graad van het lager onderwijs kunnen uitgroeien tot succesvolle probleemoplossers. Dit onderzoek bestond uit een reeks van 20 lessen, gespreid over 3 maanden. Leerlingen moesten levensechte problemen oplossen waarvan de oplossing slechts na grondig denkwerk gevonden kan worden. Verschaffel e.a. ontwikkelden hierbij een model met bijbehorende heuristieken (Figuur 2.2).

STAP 1: Ik stel me het probleem voor
- Heuristieken:
  - maak een tekening
  - maak een tabel
  - onderscheid noodzakelijke van overbodige gegevens
  - gebruik je ervaringskennis

STAP 2: Ik beslis hoe ik het probleem zal aanpakken
- Heuristieken:
  - maak een boomdiagram
  - probeer verstandig uit
  - zoek een patroon in de gegevens
  - werk met eenvoudigere getallen

STAP 3: Ik reken uit

STAP 4: Ik interpreteer mijn uitkomst en formuleer mijn antwoord

STAP 5: Ik controleer

Figuur 2.2. Het vijfstappenmodel met bijbehorende heuristieken van Verschaffel e.a.

Het onderzoek van Verschaffel e.a. (1998) wijst erop dat leerlingen dit model kunnen verwerven. Dit leidt tot positieve resultaten bij het oplossen van problemen, bij de sterkere leerlingen, maar ook bij de middelmatige en de zwakkere. Verschaffel e.a. geven verder aan dat leerlingen positievere houdingen en opvattingen ten opzichte van wiskunde kunnen ontwikkelen, door hen onder andere realistische opgaven met verschillende correcte oplossingswegen of meerdere correcte antwoorden aan te bieden. Bovendien ontdekten Verschaffel e.a. aanwijzingen dat deze aanpak ook positieve effecten heeft op het functioneren in de 'alledaagse' wiskundelessen.

Volgens Depaepe, De Corte en Verschaffel (2010) is er op dit moment nog ruimte voor verbetering in het basisonderwijs. Leerlingen in het basisonderwijs blijken heel wat moeite te hebben met het kiezen van geschikte modellen. Het oplossen van vraagstukken beperkt zich vaak tot het routinematig toepassen van rekenkundige bewerkingen. Dit leidt tot niet-realistische antwoorden. Bijvoorbeeld op het vraagstuk

> 'Wim heeft 4 planken van 2,5 m gekocht. Hoeveel planken van 1 m kan hij hieruit zagen?'

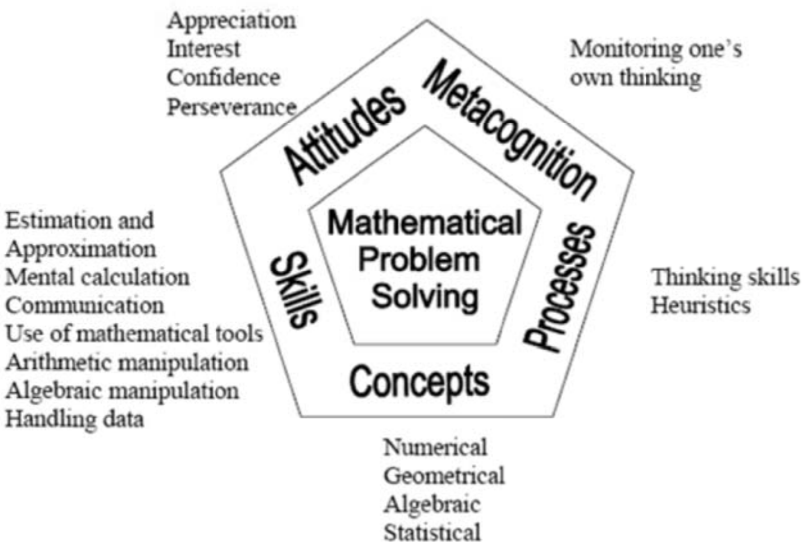
geven de meeste leerlingen ‘10’ als antwoord. De visie die Verschaffel e.a. ontwikkelden eind jaren ’90, lijkt slechts ten dele opgenomen door het basisonderwijs. Depaepe e.a. (2010) pleiten er onder meer voor om meer vraagstukken met een hoog probleemgehalte aan te bieden in het basisonderwijs, om routinematig werken bij leerlingen tegen te gaan. Leerlingen moeten ook leren om hun resultaten te toetsen aan de werkelijkheid. Bij het mathematiseren van een probleem gaat soms belangrijke informatie verloren. Daarom pleiten Depaepe e.a. ook voor een aanbod van vraagstukken dat leerlingen enkel kunnen oplossen door te steunen op ervaringskennis. Dit kan voorkomen dat leerlingen het oplossen van een schoolvraagstuk als iets wezenlijk anders beschouwen dan het aanpakken van een realistisch probleem.

Meer informatie hierover is te vinden in de bijdrage van Fien Depaepe, verder in dit hoofdstuk.

2.4 Singapore: een geïntegreerd model

Singapore scoort al jaren aan de top in TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), zowel bij leerlingen van het vierde leerjaar basisonderwijs als bij leerlingen van het tweede leerjaar secundair onderwijs. Verschillende bronnen geven aan dat dit komt door de manier waarop in Singapore gewerkt wordt aan probleemoplossende vaardigheden.

Het oplossen van wiskundige problemen staat centraal in het wiskundeonderwijs van Singapore. Het Ministerie van Onderwijs stelt dit voor aan de hand van Figuur 2.3. Het vermogen om problemen op te lossen is afhankelijk van 5 onderling verbonden componenten: concepten, vaardigheden, processen, attitudes en metacognitie (Ginsburg e.a., 2005).



Figuur 2.3 Visiemodel voor probleemoplossen in het wiskundeonderwijs in Singapore

Clark (2009) vermeldt een aantal aspecten waarin de probleemoplossende aanpak in Singapore uniek is.

Het oplossen van problemen is geïntegreerd in de gewone lessen. Bij het invoeren van een nieuw concept of vaardigheid, worden die vrij snel toegepast binnen een nieuwe probleemstelling. Zo leren leerlingen een concept of vaardigheid toepassen bij verschillende problemen.

Leerlingen krijgen ook vaak complexe opgaven aangeboden, waarbij verschillende stappen gezet moeten worden om de oplossing te vinden.

Hierbij aansluitend is er ook aandacht voor niet-routine problemen. Leerlingen krijgen vanaf 9 jaar op een gestructureerde manier les in het gebruik van heuristieken en het oplossingsproces van Pólya. Vooral stap 1 en stap 4 krijgen hierbij speciale aandacht. In stap 1 (analyse van de opgave) wordt een nieuwe opgave gekoppeld aan problemen die al eerder opgelost zijn. In stap 4 (reflectie) wordt nagegaan of er andere, misschien kortere oplossingsmethoden zijn en of de oplossingsmethode ook bij andere problemen kan gebruikt worden.

Tenslotte vermeldt Clark de moeite die in Singapore gedaan wordt om bij leerlingen een positieve houding ten opzichte van wiskunde te ontwikkelen en om te werken aan hun metacognitieve vaardigheden.

Deze aanpak verklaart volgens Clark waarom Singapore in TIMSS telkens zo hoog scoort voor wiskunde.

2.5 Probleemoplossen in het secundair onderwijs

2.5.1 Probleemoplossen in PISA2003

PISA (Programme for International Student Assessment) is een grootschalige, internationale studie die de kennis en vaardigheden van 15-jarigen test. In 2003 onderzocht PISA naast de domeinen leesvaardigheid, wetenschappelijke geletterdheid en wiskundige geletterdheid ook de domeinoverschrijdende vaardigheden van leerlingen bij het aanpakken van problemen. De Vlaamse PISA-resultaten werden beschreven door De Meyer, Pauly en Van de Poele (2004).

PISA onderscheidt voor probleemoplossen drie niveaus (zie Tabel 2.1), waarbij niveau 1 het basisniveau is.

Tabel 2.1. Omschrijving vaardigheidsniveaus bij probleemoplossen

Niveau	Aantal punten	Omschrijving
Niveau 3	> 592 punten	Reflectieve en communicatieve probleemoplossers
Niveau 2	499 – 592 punten	Redenerende en besluitvaardige probleemoplossers
Niveau 1	405 – 498 punten	Elementaire probleemoplossers
Onder niveau 1	< 405 punten	Zwakke probleemoplossers

In Figuur 2.4 is een voorbeeldvraag opgenomen. Leerlingen die deze vraag volledig correct beantwoorden, presteren op het derde vaardigheidsniveau van probleemoplossen.

VAKANTIEKAMP

Het Jongerenwerk in Zed organiseert een vakantiekamp van vijf dagen. Er hebben zich 46 kinderen (26 meisjes en 20 jongens) ingeschreven voor het kamp, en 8 volwassenen (4 mannen en 4 vrouwen) hebben zich als vrijwilliger aangemeld om het kamp te organiseren en de kinderen te begeleiden.

Tabel 1: Volwassenen

Mevr. Grietjes
Mevr. Chantal
Mevr. Merel
Mevr. Kelly
Dhr. Stevens
Dhr. Nelissen
Dhr. Willems
Dhr. Peters

Tabel 2: Slaapzalen

Naam	Aantal bedden
Rood	12
Blauw	8
Groen	8
Paars	8
Oranje	8
Geel	6
Wit	6

Regels voor de slaapzalen:

1. Jongens en meisjes slapen op gescheiden slaapzalen.
2. Op elke slaapzaal slaapt ten minste één volwassene.
3. De volwassene(n) op de slaapzaal zijn van hetzelfde geslacht als de kinderen.

Vraag 1: VAKANTIEKAMP

Vul de tabel in om de 46 kinderen en de 8 volwassenen te verdelen over de slaapzalen. Zorg ervoor dat je alle regels daarbij toepast.

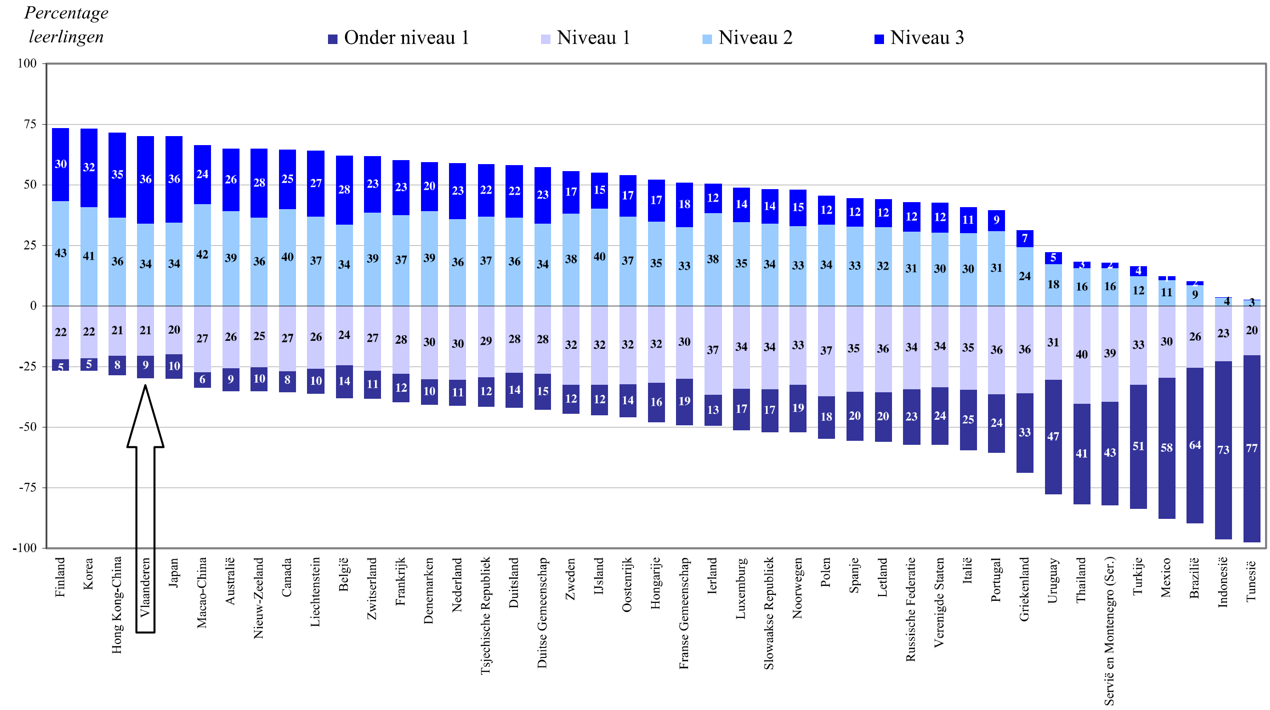
Naam	Aantal jongens	Aantal meisjes	Naam van de volwassene(n)
Rood			
Blauw			
Groen			
Paars			
Oranje			
Geel			
Wit			

Figuur 2.4 Voorbeeldopgave uit PISA 2003, domein probleemoplossen

Prestaties van landen op het domein probleemoplossen kunnen vergeleken worden door het aantal leerlingen per vaardigheidsniveau weer te geven. Uit Figuur 2.5 blijkt dat er grote verschillen bestaan tussen de deelnemende landen. Ongeveer de helft van alle leerlingen presteert op vaardigheidsniveau 2 of hoger. Dat varieert van 70% van de leerlingen of meer in Finland, Korea, Hongkong-China, Vlaanderen en Japan tot minder dan 5% in Indonesië en Tunesië. Vlaanderen is één van de drie landen waarbij meer dan een derde van de leerlingen het hoogste vaardigheidsniveau bereikt. Het percentage leerlingen dat in Vlaanderen vaardigheidsniveau 1 niet haalt, is met 10% ook vrij laag. Vlaamse 15-jarigen behalen dus zeer goede resultaten op het domein van probleemoplossen.

PISA2003 geeft ook aan dat er een sterk verband bestaat tussen de prestaties van landen voor probleemoplossen en hun prestaties voor wiskundige geletterdheid. Volgens het rapport van De Meyer e.a. is dat niet zo verwonderlijk. Enerzijds bevraagt PISA voor probleemoplossen vooral de redeneervaardigheden van leerlingen. Anderzijds focussen de opgaven bij het domein wiskundige geletterdheid eerder op de toepassing van wiskunde in levensechte situaties dan op typisch wiskundige kennis en vaardigheden. Hoewel de taken bij probleemoplossen geen wiskundige vakkennis bevragen, zijn er wel gemeenschappelijke vaardigheden die de leerlingen gebruiken bij het oplossen van vragen uit de twee domeinen.

Vlaamse leerlingen scoren gemiddeld 6 punten beter voor wiskunde dan voor probleemoplossen. Dit verschil is klein, maar wel significant. Volgens De Meyer e.a. is dit een bevestiging van de kwaliteit van het Vlaams wiskundeonderwijs.



Figuur 2.5 Percentage leerlingen per vaardigheidsniveau bij het domein probleemoplossen

2.5.2 Probleemoplossen in A-stroom en B-stroom

In het basisonderwijs wordt de aanpak bij probleemoplossen gestimuleerd vanuit wetenschappelijke hoek. De eindtermen wiskunde vermelden duidelijk het gebruik van verstandige zoekstrategieën, en dat bij opgaven verschillende oplossingswegen en meerdere oplossingen mogelijk zijn. Dit heeft een aantal handboeken voor het basisonderwijs beïnvloed.

De laatste jaren lijkt er ook in het secundair onderwijs meer aandacht voor het oplossen van problemen. De eindtermen van de eerste graad A-stroom hebben het over het gebruik van probleemoplossende vaardigheden. Eén van die vaardigheden is ‘het kiezen van een onbekende’.

Toch wordt het oplossen van problemen in de A-stroom nog vaak beperkt tot het gebruik van algebraïsche methoden (opstellen van vergelijkingen) en ontdekken van patronen (standaardheuristieken). Leerlingen moeten vooral werken met vooraf vastgelegde methoden. Vaak gaat het om vertaalproblemen, die op zich wel waardevol zijn, maar die niet leiden tot een zoekproces van hogere orde. De creatieve methoden die leerlingen vaak aangeleerd hebben in het basisonderwijs, worden blijkbaar niet meer benut.

De ontwikkelingsdoelen wiskunde voor de B-stroom van de eerste graad bevatten geen duidelijke verwijzing naar probleemoplossende vaardigheden, enkel naar ‘eenvoudige vraagstukken’ en ‘toepassingen in praktische situaties’. Onderzoek in het basisonderwijs lijkt uit te wijzen dat ook deze leerlingen, die vaak minder abstract kunnen werken, baat kunnen hebben bij een wetenschappelijk onderbouwde aanpak van problemen.

Betekent het dat op dit moment de kracht van heuristieken wat miskend wordt in het secundair onderwijs? Kan de theorie rond probleemoplossen een krachtig hulpmiddel betekenen voor leerlingen, zowel zij die moeite hebben met de formele algebrataal als zij die al verder staan en uitdagingen zoeken? En moeten de eindtermen en ontwikkelingsdoelen dan beter inspelen op die onbenutte mogelijkheden?

3 Bronnen

Abedi, J. (2000). Standardized achievement test and English language learners: Psychometric issues. *Educational assessment*, 8, 231-257

Abedi, J. en Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. *Applie Measurement in Education*, 14, 219-234

Charles, R. en Lester, F (1982). *Teaching Problem Solving: What, Why and How*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publications

Clark, A (2009). *Problem Solving in Singapore Math.* Raadpleegbaar op http://www.greatsource.com/singaporemath/pdf/MIF_Problem_Solving_Professional_Paper.pdf

Depaepe, F. , De Corte, E. en Verschaffel, L. (2010). Realistisch modelleren in het basisonderwijs: tussen doelstelling en resultaat. *Logopedie.* Raadpleegbaar op https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/271774/2/artikel+Depaepe+logopedie+201004.pdf

De Meyer, I., Pauly, J. en Van de Poele, L. (2004). *Leren voor de problemen van morgen. De eerste resultaten van PISA 2003*. Brussel: Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, Departement Onderwijs. Gent: Universiteit Gent, Vakgroep Onderwijskunde. Raadpleegbaar op http://www.ond.vlaanderen.be/publicaties/eDocs/pdf/208.pdf

Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T. en Pollock, E.(2005). *What the United States Can Learn From Singapore's World-Class Mathematics System. An Exploratory Study*. Washington DC, American Institutes for Research.

Jacobs, S., Op de Beeck, R. en Willems, J. (2005). Problem Solving. In *Uitwiskeling*, 22(1), 9-33

Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap (1995). *Basisonderwijs: ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Decretale tekst en uitgangspunten*. Brussel: Ministerie Departement Onderwijs, Afdeling informatie en documentatie.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (B-stroom)*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (A-stroom)*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. Princetown: Princetown University Press.

Pólya, G. (1990). *How to solve it, the classic introduction to mathematical problem solving – with a foreword by Ian Stewart*. London: Penguin Books.

Prenger, J. (2006). *Taal telt! Een onderzoek naar de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in realistisch rekenonderwijs*. Ongeprubliceerde doctoraatsthesis, Rijksuniversiteit Groningen, Nederland.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego, California: Academic Press, Inc.

Stewart, I (1990), Foreword. In Pólya, G. (1990), *How to solve it, the classic introduction to mathematical problem solving – with a foreword by Ian Stewart*, xi-xxx, London: Penguin Books.

Van den Boer, C. (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen van achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs.* Ongepubliceerde doctoraatsthesis, Universiteit Utrecht, Nederland.

Van Nijlen, D. (2010). *Bridging the gap: applying psychometric models in educational practice*. Leuven: K.U.Leuven.

Verschaffel, L., De Corte, E., Van Vaerenbergh, G., Lasure, S., Bogaerts, H. en Ratinckx, E. (1998). *Leren oplossen van wiskundige contextproblemen in de bovenbouw van de basisschool*. Studia Paedagogica 22. Leuven: Universitaire Pers Leuven.

Woodward, J. (2004). Mathematics education in the United States: Past and present. *Journal of learning disabilities*, 37, 16-31

4 Reflectie over de resultaten door andere onderwijspartners

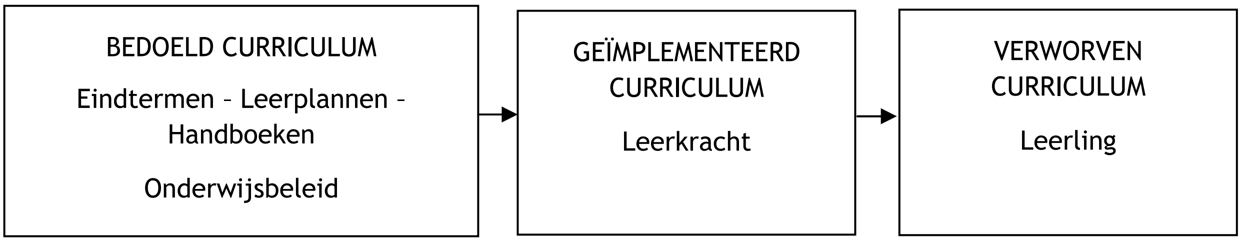
4.1 Het oplossen van wiskundige problemen in de basisschool: Van eindtermen tot peilingsresultaten. Fien Depaepe, Erik De Corte en Lieven Verschaffel, K.U.Leuven

4.1.1 De implementatietrap in het onderwijsleerproces

Op het einde van de vorige eeuw werden door de toenmalige Dienst voor Onderwijsontwikkeling (DVO) van het Departement Onderwijs minimumstandaarden voor de onderwijskwaliteit – eindtermen – opgesteld. Deze eindtermen reflecteren de maatschappelijke verwachtingen van wat een school minimaal dient na te streven. Echter, het opstellen van deze eindtermen op zich is geen garantie dat deze minimumdoelstellingen ook bereikt worden door de leerlingen (Cuban, 1993). Er is, met andere woorden, geen rechtstreeks verband tussen beleidsdocumenten die bepalen wat wenselijk is voor het onderwijs en het leren van leerlingen. De impact van de eindtermen op het leerproces bij leerlingen wordt door een veelheid van structurele en culturele factoren beïnvloed (Kelchtermans, 2005), zoals onder meer de beschikbare onderwijstijd en de aanwezige media (als voorbeelden van structurele factoren), en de opvattingen van leerkrachten over wat goed onderwijzen is en de motivatie van leerlingen om te leren (als voorbeelden van culturele factoren).

Het interpreteren van de leerprestaties van leerlingen, en dus ook van de peilingsresultaten, dient bijgevolg niet enkel begrepen te worden vanuit wat de overheid, beleidsmensen, handboekauteurs met het onderwijs voor ogen hebben, maar ook – en misschien vooral – vanuit het onderwijsleerproces dat in de klas plaatsvindt. In dit verband wordt een interessant onderscheid gemaakt tussen het bedoeld (“intended”) curriculum, het geïmplementeerd (“implemented”) curriculum en het verworven (“attained”) curriculum (zie bv. Marzano, 2003). Het *bedoeld curriculum* verwijst naar de inhoud die de overheid, onderwijskoepels, handboekauteurs voor een bepaald vak in een bepaalde onderwijsvorm voor ogen hebben. Dit bedoeld curriculum omvat zowel eindtermen, leerplannen als handboeken. Door middel van interpretaties door leerplanmakers (in functie van het eigen pedagogisch project) en handboekauteurs (in functie van wat wenselijk en haalbaar wordt geacht in de klas) zijn leerplannen en handboeken op zich al een vertaling, en dus transformatie, van de door de overheid opgestelde eindtermen (Vandenberghe, 2004). Het *geïmplementeerd curriculum* heeft betrekking op wat in de klas gebeurt. Op basis van de kennis en opvattingen van leerkrachten over het onderwijzen in het algemeen en de leerinhoud in het bijzonder, en rekening houdend met de specifieke werkcondities (de beginsituatie van de leerlingen, de materiële voorzieningen, de onderwijstijd…) krijgt het geïmplementeerd curriculum vorm in de klas: rekening houdend met het bedoeld curriculum maakt de leerkracht een selectie van wat en hoe er onderwezen wordt. Het *verworven curriculum* verwijst naar wat uiteindelijk geleerd wordt door de leerlingen. Het betreft zowel cognitieve (bv. verworven kennisinhouden) als niet-cognitieve (bv. attitudes t.a.v. de leerinhouden) uitkomsten; bedoelde (zoals uitdrukkelijk bedoeld door de eindtermen) als niet-bedoelde (niet-bedoelde gevolgen van de manier waarop het onderwijzen plaatsvindt) effecten. De resultaten van de peilingstoetsen weerspiegelen slechts een deel van dit verworven curriculum, en behoren tot wat Cuban (1993) het getest (“tested”) curriculum noemt. Deze implementatietrap tussen het bedoeld en het verworven curriculum wordt weergegeven in Schema 1.

Schema 1: De implementatietrap van bedoeld naar verworven curriculum



In dit artikel worden de resultaten voor de peilingstoetsen over wiskundig probleemoplossen in het basisonderwijs geduid vanuit recent onderzoek dat naar het onderwijzen en oplossen van wiskundige problemen dat in het zesde leerjaar in Vlaanderen gevoerd is (Depaepe, 2009). De peilingsresultaten dienen begrepen te worden vanuit zowel het bedoeld als het geïmplementeerd curriculum. De volgende paragraaf richt zich op het bedoeld curriculum. Meer specifiek worden de onderliggende opvattingen van de eindtermen voor wiskundig probleemoplossen en de vertaling ervan in handboeken besproken. In de derde paragraaf gaan we uitgebreider in op enkele onderzoeksresultaten met betrekking tot het geïmplementeerd curriculum, met name hoe verschillende Vlaamse leerkrachten dezelfde vraagstukken-lessen uit het handboek Eurobasis (Boone, D'haveloose, Muylle, & Van Maele, s.d.)[1] implementeren in de klas. Aangezien ons onderzoek betrekking had op een beperkt aantal vraagstukkenlessen bij een beperkt aantal leerkrachten (m.n. twee vraagstukkenlessen bij tien leerkrachten in een voorstudie, en ruim twintig vraagstukkenlessen bij twee leerkrachten in de hoofdstudie) moeten we voorzichtig zijn met het veralgemenen van de onderzoeksresultaten naar het ganse Vlaamse onderwijs. Desalniettemin zijn de onderzoeksresultaten een indicatie van de manier waarop in een aantal Vlaamse klassen het vraagstukkenonderwijs vorm krijgt en bieden ze aldus een kader van waaruit de peilingsresultaten kunnen begrepen worden. De vierde paragraaf heeft betrekking op de peilingsresultaten. We bespreken zowel sterktes als zwaktes en leggen verbanden met onze onderzoeksresultaten met betrekking tot de oplossingsvaardigheden en opvattingen van leerlingen. In de vijfde paragraaf ten slotte worden enkele conclusies en adviezen ter optimalisering van de onderwijspraktijk geformuleerd.

4.1.2 Het officiële curriculum: De eindtermen voor probleemoplossen in het basisonderwijs

De eindtermen voor het probleemoplossen – zoals weergegeven in onderstaande Tabel 1 – propageren een bepaalde opvatting over hoe het onderwijzen en het leren van wiskunde er idealiter zou moeten uit zien. Deze opvatting is ingegeven door een visie over de plaats en doelstellingen van wiskunde in het onderwijs, de rol van wiskunde in de samenleving, bevindingen uit wiskundedidactisch onderzoek etc.

Tabel 1: Eindtermen wiskunde basisonderwijs in verband met probleemoplossen

Eindterm	Omschrijving
ET 1.29*	De leerlingen zijn bereid verstandige zoekstrategieën aan te wenden die helpen bij het aanpakken van wiskundige problemen met betrekking tot getallen, meten, ruimtelijke oriëntatie en meetkunde.
ET 4.1	De leerlingen kunnen met concrete voorbeelden aantonen dat er voor hetzelfde wiskundig probleem met betrekking tot getallen, meten, meetkunde en ruimtelijke oriëntatie, soms meerdere oplossingswegen zijn en soms zelfs meerdere oplossingen mogelijk zijn afhankelijk van de wijze waarop het probleem wordt opgevat.

[1] Voorloper van Kompas. Het handboek *Eurobasis* werd geselecteerd omdat het op het moment van het onderzoek één van de meest gebruikte handboeken in Vlaanderen was.

ET 4.2	De leerlingen zijn in staat om de geleerde begrippen, inzichten, procedures, met betrekking tot getallen, meten en meetkunde, zoals in de respectievelijke eindtermen vermeld, efficiënt te hanteren in betekenisvolle toepassingssituaties, zowel binnen als buiten de klas.
ET 4.3	De leerlingen kunnen met concrete voorbeelden uit hun leefwereld aangeven welke de rol en het praktische nut van wiskunde is in de maatschappij.
ET 5.2*	De leerlingen ontwikkelen een kritische houding ten aanzien van allerlei cijfermateriaal, tabellen, berekeningen waarvan in hun omgeving bewust of onbewust, gebruik (misbruik) gemaakt wordt om mensen te informeren, te overtuigen, te misleiden …

Noot: De eindtermen met een * verwijzen naar attitudes

Kenmerkend voor de visie onderliggend aan de eindtermen uit Tabel 1 is vooreerst de nadruk op het verwerven van hogere orde oplossingsvaardigheden bij leerlingen. Dit blijkt onder meer uit ET 1.29*: het aanwenden van verstandige zoekstrategieën voor het aanpakken van wiskundige problemen. Deze aandacht voor hogere orde oplossingsvaardigheden ligt in de lijn van het pleidooi van onderzoekers voor het implementeren van een metacognitieve strategie die idealiter zou moeten aangewend worden bij het oplossen van wiskundige problemen (bv. Blum & Niss, 1991; Verschaffel e.a., 1998). In essentie omvat deze metacognitieve strategie vijf verschillende stappen (die niet lineair hoeven opgevat te worden): (1) ik stel me het probleem voor; (2) ik beslis hoe ik het probleem aanpak; (3) ik reken uit; (4) ik interpreteer mijn uitkomst en formuleer mijn antwoord; en (5) ik controleer. Binnen deze metacognitieve strategie is tevens een belangrijke rol toegeschreven aan het ontwikkelen van heuristieken bij leerlingen, met name, zoekstrategieën voor het analyseren van het wiskundig probleem en die de oplossing ervan aanzienlijk verhogen, maar niet garanderen, zoals bv. het maken van een schema/tekening, het onderscheiden van noodzakelijke van overbodige gegevens.

Ten tweede gaat in navolging van de principes van het realistisch wiskundeonderwijs (zie bv. Treffers, 1993) veel aandacht naar het toepassen van wat ze geleerd hebben in een betekenisvolle (realistische of imaginaire) context (zie in dit verband bv. ET 4.2). Op basis van onderzoeksresultaten wordt aangenomen dat het oplossen van betekenisvolle contextproblemen de transfer van de schoolse wiskunde naar alledaagse toepassingen bevordert (De Corte, Greer, & Verschaffel, 1996) en hoopt men aldus inerte kennis die enkel in traditionele wiskundige opgaven gebruikt kan worden (Hiebert e.a., 1996) tegen te gaan.

Ten derde worden gewenste houdingen tegenover wiskunde (zie ET 5.2 over het ontwikkelen van een kritische houding tegenover cijfermateriaal) en opvattingen over wiskunde (bv. ET 4.3 over het praktische nut van wiskunde in de maatschappij en ET 4.1 over verschillende correcte oplossingswegen en zelfs oplossingen van eenzelfde vraagstuk) beoogd. De aandacht voor deze affectieve leeruitkomsten wordt onder meer ingegeven door onderzoeksresultaten die uitwijzen dat gewenste opvattingen over en houdingen tegenover wiskunde sterk samenhangen met wiskundige prestaties (Kloosterman, 1991).

De opvattingen over het vraagstukkenonderwijs zoals beschreven in de eindtermen hebben tevens handboekenauteurs geïnspireerd en beïnvloed. Ter illustratie verwijzen we naar het handboek *Eurobasis* omdat deze methode door de leerkrachten in ons onderzoek werd gebruikt, maar vergelijkbare ideeën werden teruggevonden in andere wiskundemethodes. Het handboek *Eurobasis* - in lijn met de hierboven vermelde eindterm 1.29* - verwijst bijvoorbeeld zeer uitdrukkelijk naar de door Verschaffel en anderen (1998) ontwikkelde metacognitieve strategie voor het oplossen van wiskundige problemen. Parallel aan de eindterm 4.2 benadrukken de handboekauteurs het belang van het gebruik van voor leerlingen betekenisvolle contexten voor het aanleren van wiskundige begrippen: “*Eurobasis* vertrekt vanuit realistische, maar toch doelgerichte contexten; een boeiend, maar overzichtelijk stukje werkelijkheid dat binnen de ervaring van de kinderen ligt en dat steunt op hun fantasie of spel. Uit de introductiecontexten worden wiskundige begrippen, voorstellingen en modellen gedistilleerd en gestructureerd" (*Eurobasis*, handleiding voor de leerkrachten, p. I). Tenslotte onderstreept ook Eurobasis het belang van positieve houdingen tegenover en opvattingen over wiskunde. De handboekauteurs benadrukken bijvoorbeeld het belang van het ervaren van succes bij de leerlingen, ze sturen erop aan dat niet enkel de uitkomst maar vooral ook het oplossingsproces moet gewaardeerd worden, en geven het belang aan van groepswerk zodat leerlingen van elkaar kunnen leren.

4.1.3 Het geïmplementeerd curriculum: Het oplossen van wiskundige problemen in de klas

In het doctoraatsonderzoek van Fien Depaepe, onder begeleiding van em. prof. Erik De Corte en prof. Lieven Verschaffel, werd onderzocht in welke mate het bedoeld curriculum ook effectief vorm krijgt in een aantal Vlaamse klassen uit het zesde leerjaar (Depaepe, 2009). In wat volgt bespreken we de onderzoeksbevindingen met betrekking tot drie thema's die kenmerkend zijn voor de onderliggende opvattingen van de eindtermen wiskundig probleemoplossen: (1) de mate waarin hogere orde oplossingsvaardigheden (m.n., de metacognitieve strategie en de erin ingebedde heuristieken) aan bod komen in de lessen over vraagstukken, (2) het gebruik van realistische opgaven in deze lessen, en (3) het bevorderen van positieve houdingen en opvattingen tegenover wiskunde.

In een voorstudie (schooljaar 2005-2006) namen tien klassen van het zesde leerjaar deel die hetzelfde handboek *Eurobasis* gebruikten. In de daaropvolgende hoofdstudie werden in het schooljaar 2006-2007 gedurende zeven maanden alle vraagstukkenlessen op video opgenomen in twee klassen waarin het onderwijs van deze vraagstukken op een verschillende manier werd aangepakt. De resultaten van de voorstudie en de hoofdstudie zijn gelijklopend; in dit artikel zullen we ons beperken tot de resultaten van de hoofdstudie.

4.1.3.1 Stimuleren van de metacognitieve strategie en de erin ingebedde heuristieken

Het onderzoek bracht aan het licht dat de deelnemende leerkrachten tijdens het oplossen van vraagstukken in de klas regelmatig verwezen naar de metacognitieve strategie en de erin ingebedde heuristieken. De onderzochte leerkrachten komen met andere woorden tegemoet aan eindterm 1.29* (over het aanwenden van verstandige zoekstrategieën). Bepaalde aspecten van de metacognitieve strategie, zoals "het controleren van het antwoord", leken goed ingeburgerd te zijn in de wiskundelessen in de deelnemende klassen. Ook bepaalde heuristieken, waaronder "het maken van een schema" werden vaak als hulpmiddel gebruikt om een vraagstuk op te lossen. Andere onderdelen van de metacognitieve strategie kwamen echter zelden of nooit aan bod in de lessen, zoals "het plannen van de manier waarop het probleem wordt aangepakt". Ook sommige heuristieken uit het model voor vaardig probleemoplossen die door het handboek aangeprezen worden omdat ze leerlingen kunnen helpen bij het oplossen van vraagstukken, vonden we zelden of nooit terug in de aanpak van de deelnemende leerkrachten, zoals "het maken van een tekening".

Hoewel leerkrachten regelmatig gebruik maakten van bepaalde heuristieken of aspecten van de metacognitieve strategie, werd in slechts enkele gevallen duidelijk gemaakt *hoe* en *waarom* deze konden worden aangewend, bijvoorbeeld:

> Leerkracht: Misschien kunnen we een tekening maken om het vraagstuk voor te stellen. Het is niet belangrijk om allerhande details te tekenen *(hoe)* [...] Een tekening toont je hoe het vraagstuk opgebouwd is en helpt je fouten te voorkomen *(waarom)*

Het is belangrijk er in dit verband op te wijzen dat uit ander onderzoek gebleken is dat precies dit verwoorden van het *hoe* en *waarom* van het toepassen van een bepaalde metacognitieve strategie en/of heuristiek, een positieve invloed heeft op het doordacht aanpakken door de leerlingen van wiskundige problemen (Dignath, Buettner, & Langfeldt, 2008; Veenman, Van Hout-Wolters, & Afflerbach, 2006).

4.1.3.2 Beroep doen op realistische contexten

Een handboekanalyse van alle vraagstukken die in *Eurobasis* aan bod komen, reveleerde dat de meeste vraagstukken ingebed zijn in een voor leerlingen betekenisvolle context. Zo gaat het in de opgaven onder meer over inline skates, uitstapjes naar pretparken, bosklassen, een natuurpark, de aankoop van schoolmateriaal. Deze onderzoeksresultaten zijn belovend voor het realiseren van eindterm 4.2, met name, het hanteren van de geleerde wiskundige kennis in betekenisvolle toepassingssituaties.

In tegenstelling tot het aanpakken van een reëel buitenschools probleem, waarbij ervaringskennis en probleemoplossend gedrag centraal staat, kunnen vrijwel alle vraagstukken in de klas opgelost worden door het routinematig toepassen van aangeleerde bewerkingen en procedures. Dit oplossingsproces leidt veelal tot één correcte wiskundige oplossing, waardoor leerlingen – in tegenstelling tot eindterm 4.1 – zelden ervaren dat een vraagstuk meerdere oplossingen kan hebben. Het handboek suggereert zelfs af en toe dat de realistische context van een vraagstuk er niet toe doet, zoals in het volgende vraagstuk:

Voor haar verjaardagsfeestje mag Corinne zelf een assortiment snoep samenstellen.
Ze kiest 250 g colasnoepjes (75 cent/100 g), een zak chocoladebonbons (3,25 euro/500 g) en 250 g zuurtjes (90 cent/100 g).
Op haar feestje komen vier vriendinnetjes.

V Hoeveel kost dit mengsel per kind?

B S

1) 250 g à 75 cent/100 g → 187,5 cent
2) 500 g 3,25 euro → 325 cent
3) 250 g à 90 cent/100 g → 225 cent
1000 g — 737,5 cent
737,5 cent : 4 = 184,375 cent

A Dit mengsel kost 184 cent of 1,84 euro per kind. OK

Figuur 1: Illustratie van een vraagstuk en antwoordsleutel uit de leerkrachtenhandleiding van Eurobasis

Zoals geïllustreerd in Figuur 1 stelt de antwoordsleutel van het handboek een oplossing voor waarin geen rekening wordt gehouden met de reële context van het vraagstuk. Immers, Corinne is ook aanwezig op haar verjaardagsfeestje en zal wellicht zelf een deel van dit mengsel snoepjes lusten. Sommige leerlingen in de twee onderzochte klassen hielden hier wel rekening mee en deelden het snoepmengsel door vijf (de vier vriendjes en Corinne) en niet door vier (zoals voorgesteld door het handboek). Opmerkelijk is dat slechts één leerkracht deze (realistische) werkwijze van leerlingen goedkeurde, terwijl beide leerkrachten de voorgestelde oplossing door het handboek wel goedkeurden. Daar gaat voor de leerlingen duidelijk de suggestie van uit dat de wereld van de wiskunde eigenlijk niets te maken heeft met de alledaagse wereld, in tegenstelling tot wat men met eindterm 4.3 wil bereiken.

Indien leerkrachten wel verwijzingen maakten naar het dagelijkse leven was dit vaak op een eerder oppervlakkige manier (bv. het uitleggen van een bepaald woord uit de opgave van het vraagstuk). In slechts enkele gevallen was er sprake van een echte wisselwerking tussen de wiskundige opgave en een analoge situatie in het leven buiten de klas, zoals blijkt uit de manier waarop in één van de klassen het volgende vraagstuk werd aangepakt:

> Een geoefend marathonloper kan in anderhalf uur 28 km afleggen. Hoe lang doet hij over de volledige afstand (42 km) in de veronderstelling dat hij die snelheid aanhoudt?
>
> Leerkracht: Wat wil dat zeggen "in de veronderstelling dat hij die snelheid aanhoudt?" Waarom staat dat erbij? Want wat zegt de werkelijkheid?
> Leerling: Dat hij zal vertragen.
> Leerkracht: Natuurlijk zal hij vertragen. Waarom?
> Leerling: Omdat hij moe wordt.
> Leerkracht: Hij wordt moe. Bijvoorbeeld, als je een sprinter vergelijkt met een marathonloper:

Wie zal de hoogste gemiddelde snelheid hebben?
Leerling: Een sprinter.
Leerkracht: Waarom?
Leerling: Hij moet minder lopen.
Leerkracht: Ja, je kan in een korte afstand veel rapper lopen. Als je bijvoorbeeld aan het fietsen bent, dan kan het zijn dat je na 100 km toch al een beetje moe wordt.

Dit lesfragment illustreert hoe de leerkracht wel de aandacht vestigde op het feit dat de onderstellingen (m.n. een constante gemiddelde snelheid) van het wiskundige model waarmee het vraagstuk kan worden opgelost (in dit geval de regel van drie) niet steeds gelden in de realiteit. Met andere woorden, de oplossing bekomen door toepassing van deze regel van drie zal slechts een benadering zijn van de tijd waarin de loper in werkelijkheid de marathon zal uitlopen.

4.1.3.3 Werken aan positieve houdingen tegenover en opvattingen over wiskunde

Verder werkten de deelnemende leerkrachten zelden op een uitdrukkelijke manier aan het bevorderen van positieve houdingen tegenover en opvattingen over wiskunde bij hun leerlingen, ook al wordt dit in de eindtermen belangrijk geacht. Een uitzondering hierop was dat een aantal leerkrachten wel geregeld benadrukte dat eenzelfde vraagstuk op verschillende manieren kan worden aangepakt (in lijn met eindterm 4.1), bijvoorbeeld, *"Er zijn meerdere wegen die leiden naar Rome."; "Het is belangrijk dat je de manier kiest die jou het meeste ligt."; "Wie vond nog een andere oplossingswijze?"*

Verrassend is dat in veel klassen weinig of geen gebruik gemaakt werd van groepswerk voor het oplossen van vraagstukken, terwijl deze werkvorm zowel in de onderzoeksliteratuur (zie bv. O'Donnell, 2006) als in het handboek *Eurobasis* sterk aanbevolen wordt.

4.1.4 Het verworven curriculum: De leerresultaten van leerlingen

Bij het beschrijven van de leeruitkomsten bij leerlingen leggen we parallellen tussen onze eigen onderzoeksresultaten bij een beperkte groep Vlaamse leerlingen en de peilingsresultaten bij een grote, representatieve steekproef van de Vlaamse leerlingen uit het zesde leerjaar. We bespreken zowel sterktes als zwaktes in de onderzoeks- en peilingsresultaten en duiden de resultaten vanuit onze bevindingen over het geïmplementeerd curriculum. We maken een onderscheid tussen de probleemoplossende vaardigheden (4.1) en de opvattingen en houdingen van leerlingen tegenover het wiskundeonderwijs (4.2).

4.1.4.1 Probleemoplossende vaardigheden

De peilingsresultaten van 2009 voor het probleemoplossen bij getallen en bewerkingen tonen aan dat 78% van de leerlingen de eindtermen (zoals weergegeven in Tabel 1) behalen. Zo blijken de meeste leerlingen in staat om een correcte oplossing te vinden na het aanwenden van zoekstrategieën zoals het maken van een tekening of schets, het onderscheiden van noodzakelijke en overbodige gegevens. Een vergelijking met de peilingsresultaten uit 2002, waar 68% van de leerlingen de minimumdoelstellingen behaalde, geeft een positieve evolutie weer.

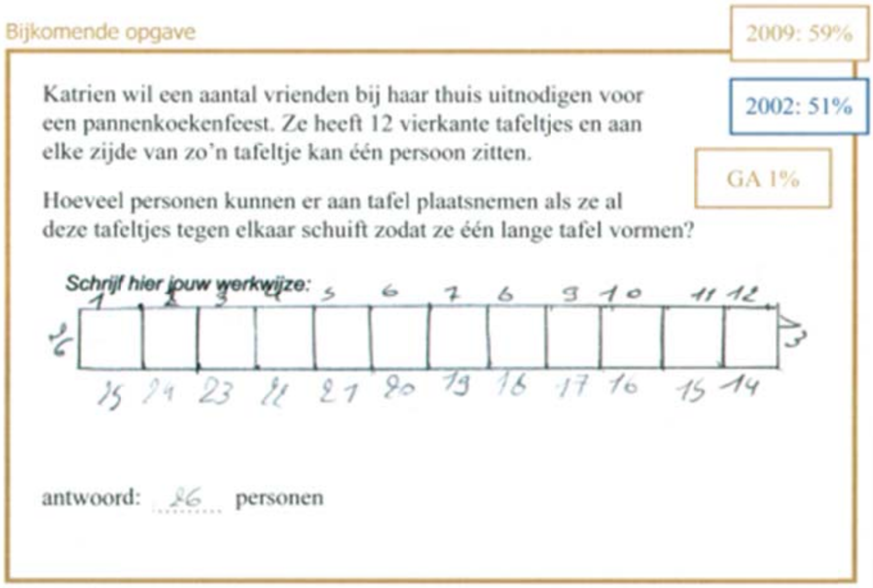
Gelijkaardige bevindingen vonden we in ons eigen onderzoek waarbij leerlingen goed scoorden op vraagstukken die geleken op de problemen waarmee ze in hun wiskundelessen geconfronteerd werden[2].

Deze goede prestaties zijn zeker een verdienste van de handboekontwikkelaars en de leerkrachten in het basisonderwijs. Zoals ons onderzoek aantoonde, worden verstandige zoekstrategieën regelmatig door de leerkracht aangewend in de les. Door het aanwenden van deze zoekstrategieën blijken leerlingen in staat om andere problemen op een correcte manier op te lossen.

---

[2] We namen bij elke leerling van de hoofdstudie de test van het leerlingvolgsysteem (LVS) voor wiskunde af, zowel bij aanvang als bij afloop van de studie.

Hoewel de peilingsresultaten voor het oplossen van wiskundige problemen duidelijk positief zijn, moet er wel rekening mee worden gehouden dat opgaven waarbij leerlingen geen formules mogen gebruiken, zoals het toepassen van meten en meetkunde in betekenisvolle situaties, door bijna de helft van de leerlingen niet correct opgelost worden. Analoge bevindingen merken we voor een aantal bijkomende opgaven[3] in verband met getallen en bewerkingen die niet op een routinematige manier kunnen worden opgelost. Een illustratie hiervan wordt gegeven in Figuur 2. Hoewel we opnieuw een positieve evolutie vaststellen ten opzichte van de peilingsresultaten van 2002, merken we dat in 2009 slechts een goede helft van de leerlingen correct kan oplossen hoeveel personen er aan een lange tafel van 12 korte vierkante tafeltjes zullen kunnen plaatsnemen.



Figuur 2: Opgave uit de peilingstoetsen die niet door middel van een formule kan worden opgelost

Deze peilingsresultaten liggen tevens in de lijn van onze onderzoeksbevinding dat leerlingen slecht scoorden op vraagstukken die veel denkwerk en het gebruik van ervaringskennis vereisen[4]. Dit illustreren we hier met het volgende vraagstuk:

> Jakob en zijn vrienden spelen graag met pijl en boog. Om één boog te maken, hebben ze een stuk touw van 1 meter nodig. In de garage heeft Jakob nog 8 stukken touw van 2,5 meter lang gevonden. Hoeveel stukken touw van 1 meter kunnen ze daaruit knippen?

De meeste leerlingen baseerden zich nauwelijks op hun ervaringskennis bij de oplossing van deze opgave; ze vermenigvuldigden de lengte van de stukken touw (2,5 meter) met het aantal (8) om vervolgens (verkeerdelijk) te besluiten dat er 20 stukken touw van 1 meter kunnen geknipt worden.

Een mogelijke oorzaak voor de bevinding dat leerlingen nauwelijks beroep doen op hun ervaringskennis, ook als deze vereist is, bij het oplossen van wiskundige problemen, kunnen we vinden in het bedoeld en geïmplementeerd curriculum. Zowel een handboekanalyse als een analyse van de opgaven die in de onderzochte vraagstukkenlessen werden gebruikt toonde aan dat weinig vraagstukken een hoog “probleemgehalte” hebben waarbij het gebruik van ervaringskennis zinvol is voor de oplossing ervan (zie 3.2).

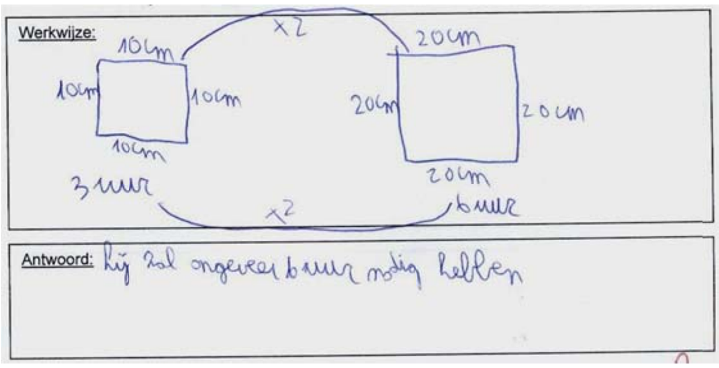
---

[3] De bijkomende opgaven zijn moeilijker dan het vereiste minimumniveau. Ze gaan verder dan wat de eindtermen beogen.

[4] Tevens werd bij alle leerlingen zowel bij aanvang als bij afloop van de studie parallelle toetsen afgenomen, elk bestaande uit tien vraagstukken met een hoog probleemgehalte.

Tevens vonden we in ons onderzoek dat hoewel leerlingen soms zinvolle oplossingsstrategieën aanwendden voor het oplossen van probleemvraagstukken (zoals het maken van een schets in Figuur 2), dit niet steeds gepaard ging met het vinden van een juiste oplossing, zoals geïllustreerd in Figuur 3.

> Om een vierkant grasplein met een zijde van 40 meter te maaien, heeft tuinman Jef 3 uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een ander vierkant grasplein te maaien met een zijde die dubbel zo lang is?



Figuur 3: Werkwijze en antwoord van een leerling bij bovenstaand vraagstuk

Deze leerling wendt twee heuristieken aan om het vraagstuk op te lossen, namelijk "vereenvoudig de getallen" (voor het gemak verkiest hij om de opgave voor te stellen met een vierkant met zijde van 10 cm in plaats van 40 meter) en "maak een tekening" (hij maakt een tekening van zowel het gegeven vierkant grasplein als van het gevraagde grasplein met zijde twee keer zo lang). Toch lost hij het vraagstuk verkeerd op door onterecht een lineaire relatie te veronderstellen tussen de lengte van de zijde van het vierkant en de oppervlakte ervan. Echter, mocht de leerling een meer accurate voorstelling van de opgave gemaakt hebben (waarbij de lengte van de zijden van het ene vierkant effectief de helft was van de lengte van de zijden van het andere vierkant), dan had het hem kunnen helpen om deze misvatting te overkomen (m.n., de voorstelling zou duidelijker aangetoond hebben dat de oppervlakte van het ene vierkant vier maal kleiner was dan de oppervlakte van het andere vierkant). Een sterkere nadruk op *hoe* en *waarom* deze heuristieken aangewend kunnen worden in de vraagstukkenlessen zou een potentiële bijdrage kunnen leveren in het correct aanwenden van zoekstrategieën door leerlingen.

4.1.4.2 Houdingen en opvattingen van leerlingen tegenover wiskunde

De peilingstoetsen peilden tevens naar het zelfvertrouwen van leerlingen en hun waardering ten opzichte van wiskunde. Uit deze bevraging blijkt dat meer dan drie kwart van de leerlingen zichzelf meestal goed vindt in wiskunde, en bijna twee derde zegt snel wiskunde te leren. Uit de peilingstoetsen bleek ook dat drie kwart van de leerlingen voorbeelden kan geven van alledaagse situaties waarin de schoolse wiskunde hen van pas komt.

Gelijkaardige positieve bevindingen vonden we in ons onderzoek waarbij de leerlingen gevraagd werden een vragenlijst in te vullen die peilde naar hun houdingen en opvattingen tegenover wiskunde, in het algemeen, en vraagstukken, in het bijzonder. Globaal genomen zijn de leerlingen van mening dat buiten de school nuttig gebruik kan gemaakt worden van wat er in de wiskundelessen wordt geleerd. Tevens zijn ze van oordeel dat er meerdere manieren zijn om tot het juiste antwoord op een vraagstuk te komen.

Hoogstwaarschijnlijk leveren aspecten van de klascultuur tijdens het oplossen van wiskundige problemen een aanzienlijke bijdrage tot deze positieve bevindingen. Het veelvuldig gebruik maken van betekenisvolle situaties in de vraagstukkenlessen en het meermaals benadrukken dat een vraagstuk op verschillende manieren kan worden aangepakt zullen hier wellicht een belangrijke rol in spelen.

Hoewel de peilingsresultaten en de eigen onderzoeksresultaten aantonen dat leerlingen positieve houdingen en opvattingen tegenover wiskunde erop nahouden, merken we nog een aantal "groeipunten": Slechts ruim de helft van de leerlingen geeft in de peilingsresultaten aan graag wiskunde te leren. Ook ons onderzoek toonde aan dat globaal genomen de leerlingen niet graag vraagstukken oplossen waarbij veel denkwerk wordt vereist. Het expliciet ter sprake brengen van gewenste opvattingen over wiskunde (bv. dat je – zelfs als leerkracht – lang en diep kan moeten nadenken over bepaalde vraagstukken, dat vraagstukken oplossen plezierig kan zijn, dat het gebruik van ervaringskennis zinvol is bij het oplossen van wiskundige problemen) kan een hefboom zijn om ook op deze groeipunten verder verbetering te boeken.

4.1.5 Aanbevelingen voor de onderwijspraktijk en het onderwijsbeleid

De peilingsresultaten tonen aan dat het overgrote deel van de leerlingen de minimumdoelstellingen voor probleemoplossende vaardigheden in het basisonderwijs behaalt. Deze bevindingen tonen aan dat de onderwijspraktijk de leerlingen vertrouwd heeft gemaakt met het oplossen van vraagstukken in een betekenisvolle context en met verstandige zoekstrategieën die hen in staat stellen om deze vraagstukken op te lossen.

In het licht van enkele zwaktes in de peilingsresultaten voor wiskundig probleemoplossen, bijvoorbeeld wat betreft het oplossen van opgaven waarbij ervaringskennis eerder belangrijk is dan het routinematig toepassen van wiskundige regels en formules, geven we vanuit onderzoek vier suggesties ter optimalisering van de onderwijspraktijk. Vooreerst menen we dat het niet enkel belangrijk is dat leerkrachten zoekstrategieën aanwenden om wiskundige problemen op te lossen, maar dat ze tevens best aandacht besteden aan *hoe* en *waarom* deze strategieën kunnen toegepast worden om een vraagstuk op te lossen. Uit voorgaand onderzoek is immers juist gebleken dat dit laatste van cruciaal belang is om bij de leerlingen een meer doordachte aanpak van vraagstukken te bevorderen. Ten tweede kunnen we stellen dat het merendeel van de vraagstukken aanleunt bij alledaagse situaties en dit wellicht bijdraagt tot de positieve peilingsresultaten, maar dat deze vraagstukken doorgaans slechts weinig echt denkwerk vereisen van de leerlingen. Het vertrouwd maken van leerlingen met vraagstukken met een hoog probleemgehalte waar ervaringskennis en denkwerk wel vereist is zou hen wellicht beter vertrouwd maken met opgaven in de peilingstoetsen waar deze kennis tevens vereist is. Ten derde, en gerelateerd aan het voorgaande, is het van belang dat leerkrachten aantonen dat ervaringskennis zinvol kan aangewend worden in het oplossingsproces van vraagstukken. Ervaringskennis is niet enkel belangrijk om bepaalde woorden uit de opgave te begrijpen, maar maakt tevens een wezenlijk onderdeel uit van het oplossingsproces van vraagstukken met een hoog probleemgehalte (zoals de vraagstukken uit Figuur 2 en 3). Tegelijkertijd erkennen we de moeilijkheid om in dit oplossingsproces op een evenwichtige manier aandacht te besteden aan zowel de wiskundige structuur van het vraagstuk als aan elementen uit de context waarin het vraagstuk is ingebed. Een dergelijke aanpak roept bij leerkrachten heel wat onzekerheden op (bv. Hoe ver moet men gaan in het integreren van realistische overwegingen in het oplossingsproces? Is een dergelijke aanpak voor alle leerlingen wenselijk?). Ten vierde zou een uitdrukkelijkere bespreking van positieve opvattingen over en houdingen tegenover wiskunde verder kunnen bijdragen tot het ontwikkelen van de gewenste affectieve leeruitkomsten bij leerlingen.

Wat het onderwijsbeleid betreft, menen we dat het niet enkel belangrijk is om initiatieven te ondernemen ten aanzien van het bedoeld curriculum (bijv. door het formuleren van eindtermen en leerplannen) en het getest curriculum (bijv. door het organiseren van peilingstoetsen), maar zeker ook ten aanzien van het geïmplementeerd curriculum. In dat verband is het belangrijk om leerkrachten te ondersteunen bij het implementeren van het curriculum dat het onderwijsbeleid voor ogen heeft. Dit ondersteunen kan onder meer door het voorzien van boeiend en uitdagend leermateriaal (bijvoorbeeld in de vorm van vraagstukken met een hoog probleemgehalte), maar vooral ook in de begeleiding van leerkrachten in de manier waarop dit materiaal in overeenstemming met de eindtermen in de dagelijkse klaspraktijk adequaat kan geïmplementeerd worden.

4.1.6 Bronnen

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends, and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Boone, M., D'haveloose, W., Muylle, H., & Van Maele, K. (s.d.). *Eurobasis 6*. Brugge: Die Keure.

Cuban, L. (1993). The lure of curricular reform and its pitiful history. *Phi Delta Kappan, 75*, 182-185.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan Library Reference USA.

Depaepe, F. (2009). *The culture and practices in sixth-grade mathematics classrooms: An attempt to unravel relationships between social and individual aspects in problem-solving lessons.* Niet-gepubliceerd doctoraatsproefschrift, Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, Leuven. Promotor: Erik De Corte. Copromotor: Lieven Verschaffel.

Dignath, C., Buettner, G., & Langfeldt, H. P. (2008). How can primary school students learn self-regulated learning strategies most effectively?: A meta-analysis on self-regulation training programmes. *Educational Research Review, 3*, 101-129.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher, 25*(4), 12-21.

Kelchtermans, G. (2005). Teachers' emotions in educational reforms: Self-understanding, vulnerable commitment and micropolitical literacy. *Teaching and Teacher Education, 21*, 995-1006.

Kloosterman, P. (1991). Beliefs and achievement in seventh-grade mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(3), 3-15.

Marzano, R. J. (2003). *What works in schools.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

O'Donnell, A. M. (2006). The role of peers and group learning. In P. A. Alexander & P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology. Second edition* (pp. 781-802). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal. Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 89-108.

Vandenberghe, R. (2004). Over stuurbaarheid van het onderwijs. Een analyse van sturend beleid, resultaten en niet-bedoelde effecten. In G. Kelchtermans (Red.), *De stuurbaarheid van onderwijs: Tussen kunnen en willen, mogen en moeten (Studia Paedagogica 37, pp. 89-120)*. Leuven: Universitaire Pers.

Veenman, M. V. J., Van Hout-Wolters, B. H. A. M., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning, 1*, 3-14.

Verschaffel, L., De Corte, E., Van Vaerenbergh, G., Lasure, S., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1998). *Leren oplossen van wiskundige contextproblemen in de bovenbouw van de basisschool*. Leuven: Universitaire Pers Leuven.

4.2 Ook een eigenschap bewijzen met de leerlingen is oefenen op probleemoplossende vaardigheden. Anne Schatteman, Redactie uitwiskeling

4.2.1 Problem Solving in wiskunde, belangrijk?

Het oplossen van problemen is een kerntaak binnen ons onderwijs; in de peiling wiskunde van het basisonderwijs was dit een aparte schaal waar leerlingen goed op scoren; in het secundair onderwijs is dit niet expliciet bevraagd. Het oplossen van problemen (met heuristieken en oplossingsproces) lijkt ook minder aanwezig in het secundair onderwijs. Nochtans zijn er heel wat gelegenheden om hieraan te werken, ook in de eerste graad...

De meesten onder ons delen de mening van Georges Polya (1957). Hij benadrukte in zijn boek ‘How to solve it’ dat wij als wiskundeleerkrachten een belangrijke rol hebben om onze leerlingen hierin te begeleiden en vaardig te maken. We moeten echte probleempjes aanbieden, verschillend van driloefeningen! (Schoenfeld, 1985). Polya en Schoenfeld zetten daarbij heel duidelijk uiteen ‘hoe’ we leerlingen kunnen ‘leren’ om problemen op te lossen. Polya onderscheidt vier fasen in het oplossingsproces: begrijpen van het probleem, het opstellen van een plan, het uitwerken van een plan en de reflectie op het verloop van de oplossing. Per fase bespreekt hij vuistregels en hulpacties (heuristieken). Door systematisch de fasen te benadrukken en herhaaldelijk dezelfde vragen te stellen (zoveel mogelijk contextonafhankelijk) die het gebruik van heuristieken aanmoedigen, kunnen we op de lange duur leerlingen zelfstandig maken in het oplossen van problemen.

In tabel 1 wordt ter informatie het schema beschreven volgens Polya, aangevuld met de aangepaste heuristieken.

Tabel 1 Het oplossingsschema van Polya

1 Begrijpen van het probleem
▪ Wat is gegeven? Wat is gevraagd? Wat zijn de voorwaarden? ▪ Is de voorwaarde voldoende? Of niet? Kunnen de voorwaarden gerealiseerd worden? In welke mate hebben ze een invloed op het gevraagde? ▪ Maak een tekening. Voer aangepaste notaties in. Voeg hulplijnen toe. ▪ Onderzoek voorbeelden: eerst eenvoudige voorbeelden, dan meer en meer algemeen. Zijn er heel speciale voorbeelden? Geldt er in dat geval ook iets gelijkaardigs? ▪ Begrijp je waarom het probleem niet evident is? Waarom er echt sprake is van een echt probleem? ▪ Voel je intuïtief dat je tot gelijkaardige vaststellingen zou komen?
2 Opstellen van een plan
▪ Herinner je je een gelijkaardig probleem? Wat deed je toen? ▪ Ken je een probleem dat ermee verband houdt? Ken je een eigenschap die nuttig zou zijn? ▪ Kijk naar het gevraagde! Is er een vertrouwd probleem met hetzelfde / vergelijkbaar gevraagde? Kan je de methode gebruiken? Het resultaat? ▪ Kan je het probleem herformuleren? Ga terug naar de definities. ▪ Tracht een eenvoudiger probleem op te lossen? Een algemener? Een deelprobleem? Laat enkele voorwaarden vallen … ▪ Zal het oplossen van het eenvoudigere probleem leiden naar de algemene oplossing, is hier een aanwijzing voor? ▪ Werden alle gegevens gebruikt?
3 Uitvoeren van het plan
▪ Analyseer elke stap. Kan je elke stap verklaren? ▪ Welke vragen ga je jezelf stellen?
4 Reflectie
▪ Was het probleem wel juist begrepen? ▪ Is het antwoord binnen de verwachtingen? ▪ Onderzoek het resultaat/ de methode die je gevonden hebt/ de argumentering die gebruikt is. Zijn er fouten gemaakt? ▪ Is het algemeen toepasbaar, voor elke situatie? Heb je wel alle gevallen beschouwd? ▪ Kan het resultaat op een andere manier gevonden worden? Is het misschien niet zo moeilijk als je dacht? ▪ Kan het uitgebreid worden in een ander probleem? Is er iets dat verder kan onderzocht worden? Is het resultaat veralgemeenbaar? Is de methode herbruikbaar?

Waarom niet zo snel mogelijk beginnen met het schematisch oplossen van problemen, onder andere binnen het kader van het bewijzen van eigenschappen? Eigenschappen en stellingen worden in handboeken kant en klaar aangeboden: in hun formulering staat al het antwoord op een vraag, zonder dat de vraag ergens geformuleerd is geworden. Maar natuurlijk is elke onderzoeker die de stelling ooit als eerste gevonden heeft, vertrokken van een vraag die hij zich stelde. Hij moest er niet alleen een antwoord op bedenken maar hij moest ook nog een verklaring zoeken voor dat antwoord. De fasen die hij doorlopen heeft bij het zoeken naar de verklaring (het bewijs) vertonen heel veel verwantschap met het oplossingsproces zoals beschreven door Polya (Epp, 1994, Lakatos, 1976)

Waarom deze gelegenheid niet te baat nemen in het onderwijs: we zoeken van enkele eigenschappen die we belangrijk en interessant vinden, het probleem, de vraag die er achter zit en we zoeken samen met de leerlingen, in een probleemoplossende sfeer, naar het antwoord en naar de verklaring ervan. Onderzoek (Stylianides en Stylianides, 2006) wijst uit dat dit reeds mogelijk is met jonge kinderen, mits een aangepaste didactiek.

In deze bijdrage wordt één voorbeeld van een eigenschap behandeld: de didactische aanpak is gestuurd door de heuristieken in het oplossingsschema van Polya. De vier fasen zijn zichtbaar. De gebruikte heuristieken zijn in in schuine druk en vetjes aangeduid. Drie methoden worden belicht.

4.2.2 Uitgewerkt voorbeeld.

Het leerplan in de eerste graad A-stroom biedt een aantal mogelijkheden om bewijsjes van eigenschappen probleemoplossend aan te pakken: het kenmerk van de middenloodlijn van een lijnstuk, het kenmerk van een gelijkbenige driehoek, de drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door een zelfde punt, de som van de hoeken van een driehoek is 180°, ….

Hieronder wordt het laatste voorbeeld didactisch uitgewerkt. We vertrekken van een probleem:

Is er een verband tussen de hoeken van een driehoek?

Fase 1: Begrijpen van het probleem.

Stap 1: De leerlingen **voelen** dat er een verband moet zijn, al weten ze nog niet welk verband?

- Experimenteren: met een plooimeter, met Meccano, met Knex, ….. We verdelen de leerlingen in groepjes en geven elk groepje een andere materiaalset. Elk groepje tracht tot een hypothese te komen.

  Vaststelling: als ik twee hoeken kies, dan is er geen vrije keuze meer voor de derde hoek. Dus die ligt vast.

Stap 2: Wat is het verband dan tussen de hoeken van een driehoek?

- Experimenteren: we laten de leerlingen verschillende voorbeelden onderzoeken. Hoe pakken we dat aan? Laten we eerst eenvoudige voorbeelden onderzoeken. Welke soorten driehoeken kennen we? Scherphoekige, rechthoekige, stomphoekige? Laten we zo gevarieerd mogelijk onderzoeken…..
  - Groep 1: de leerlingen tekenen allemaal driehoeken: Elke leerling meet telkens nauwkeurig de grootte van de drie hoeken. Is er een verband tussen de groottes?
  - Vaststelling: Liggen alle resultaten in elkaars buurt? Hoe komt het dat niet iedereen hetzelfde resultaat heeft? Wat kan hier meespelen? De leerlingen formuleren een hypothese.
  - Groep 2: De leerlingen experimenteren met Geogebra en/of Cabri:
  - Vaststelling: de leerlingen vinden dat de som van de hoeken steeds gelijk is aan 180°.
  - Groep 3: Krijgt een uitgeknipte versie van de driehoek met gekleurde hoeken, maar geen geodriehoek of gradenboog. Ze mogen de driehoek manipuleren hoe ze willen om iets over de som van de hoeken te kunnen vaststellen.

  Vaststelling: na afscheuren van de hoeken en mooi positioneren stellen ze vast dat de drie hoeken samen een gestrekte hoek vormen.

Stap 3: We leggen de bevindingen van de drie groepen samen en we oordelen kritisch:

- Groep 1: Kritisch: hoe komt het dat er in de eerste groep verschillende resultaten zijn? We hebben enkele voorbeelden onderzocht. Is het wel altijd waar?
- Groep 2: Een duidelijk beeld; het vermoeden wordt sterk want het aantal onderzochte voorbeelden is nu echt wel groot en de meting gebeurde nauwkeurig. Maar toch, is het algemeen waar? Het blijven voorbeelden, al zijn het er oneindig veel, na slepen van de hoekpunten.
- Groep 3: Kritisch: vormen die drie hoeken samen wel echt een gestrekte hoek; liggen die twee uiterste benen wel altijd in elkaars verlengde? Of is er misschien een kleine knik? Is het toeval?

Stap 4: een hypothese wordt geformuleerd.

De som van de hoekgroottes van een driehoek is steeds 180°.

Stap 5: Waarom is het altijd waar? Waarom is het resultaat onafhankelijk van de voorbeelden die we onderzocht hebben. Het probleem is duidelijk nog niet opgelost.

Dit is niet evident in een eerste graad. Leerlingen moeten overtuigd worden a. h. v. talrijke kleine beweringen, dat we pas zeker zijn van een bewering van zodra we een algemeen geldende redenering hebben gevonden die losstaat van de voorbeelden die we hebben onderzocht. De bewijscultuur in wiskunde mag dus niet brutaal opgedrongen worden, maar moet ervaren worden als nodig.

Het is logisch dat deze fase niet losstaat van de fase waarin men het probleem binnenste buiten heeft gekeerd om het te begrijpen. Hoe grondiger fase 1 beleefd is, hoe sneller we tot een plan kunnen komen. Zijn er methodes die we in fase 1 gehanteerd hebben die veralgemeenbaar zijn, die vertaalbaar zijn in wiskundetaal?

- meten van hoeken? Neen, moeilijk.
- scheuren van hoeken en verleggen van hoeken? Misschien wel! Verleggen heeft met transformaties te maken.

Methode 1:

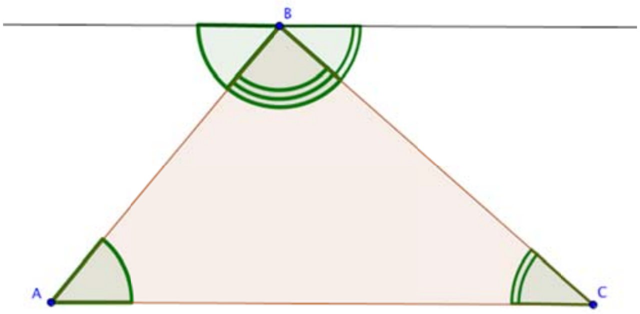
Fase 2: Opstellen van een plan:

Sluit aan bij het scheurexperiment.

Wat moeten we verklaren?

Wat was het probleem? Waar waren we niet zeker van?

We moeten dus nog verklaren dat in elk geval, voor elke driehoek die we willekeurig kiezen, die drie hoeken samen een gestrekte hoek gaan vormen en dus dat de uiterste benen in elkaars verlengde liggen. *We maken een schets van de situatie:*



We hebben de hoeken $\hat{A}$ en $\hat{B}$ verlegd. *Kennen we wiskundetheorie die te maken heeft met verleggen van objecten?* Dat is in de wiskunde hetzelfde als een transformatie uitvoeren. *Wat weten we hierover? Kennen we eigenschappen die nuttig zijn?*

Plan:

- transformaties kiezen die de hoeken in A en in C verplaatsen tot in het hoekpunt B.

- Verifiëren op basis van eigenschappen van transformaties dat de benen van de hoeken in elkaars verlengde zullen liggen.

Fase 3: Uitvoeren van het plan

Welke transformatie kan die hoek sturen op één van de hoeken in B? Bijvoorbeeld een puntspiegeling t.o.v. het midden van [AB]. Wat doet een puntspiegeling met een rechte? Met een hoek?

Analoge redenering voor de hoek in C.

De verklaring wordt stapsgewijs uitgeschreven. *Bij elke stap wordt er nauwkeurig gecheckt of de eigenschap kan gebruikt worden en het goede resultaat oplevert.*

Fase 4: Reflectie

Kan men nog andere transformaties gebruiken om een gelijkaardige redenering op te bouwen? (verschuivingen?)

Mochten we de hoeken niet afgescheurd hebben, dan waren we misschien niet op dit plan gekomen? *Zijn er nog andere methodes?*

Wat betekent dat nu voor speciale driehoeken?

- rechthoekige
- gelijkzijdige
- gelijkbenige
- ….

Kan een gelijkaardige methode gebruikt worden voor andere figuren? Bijvoorbeeld aanliggende hoeken van een parallellogram zijn samen 180°?

En we brengen een onderzoekssfeer in de klas …. van het één komt het ander! De fase van reflectie is een drijvende kracht naar nieuwe vragen en nieuwe ontdekkingen.

sleutelideeën / te onthouden: leerlingen moeten niet veel memoriseren om achteraf de redenering terug te kunnen opbouwen

- scheurexperiment vertalen in een tekening.
- verleggen is een transformatie uitvoeren.
- effect van deze transformatie op rechten en op hoeken beschrijven.

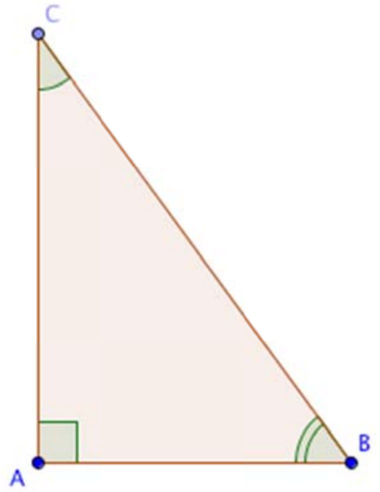
Methode 2

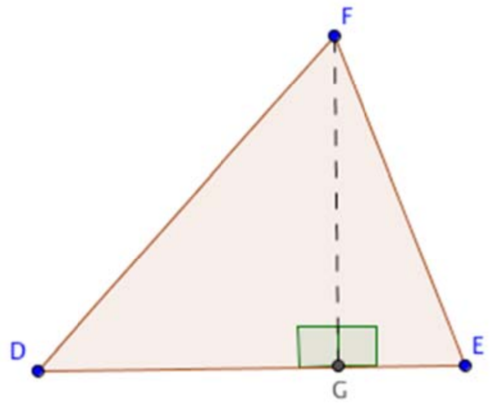
Fase 2: Opstellen van een plan:

Mochten we niet aan het scheurexperiment gedacht hebben?

Dan moeten we de oplossingsstrategie van scratch terug opstarten.

- *We proberen eerst een eenvoudiger probleem op te lossen*: wat betekent in deze context eenvoudig? Wat in het geval van rechthoekige driehoeken? Wat zouden we dan moeten bewijzen?
- Vooraleer we ons engageren *moeten we zeker zijn dat dit eenvoudige geval ons gaat vooruithelpen. Gaan we de methode kunnen veralgemenen? Gaan we het resultaat kunnen gebruiken?*
- *We maken een tekening van de situatie en brengen hulplijnen aan.*





Als we weten dat de som van de twee scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek samen 90° is, dan kunnen we ook snel verklaren waarom de som van de drie hoeken in een willekeurige driehoek gelijk is aan 180°.

We vervangen dus het oorspronkelijk probleem door een eenvoudiger, maar gelijkwaardig probleem.

- **Zijn er andere figuren die je kan linken aan dit probleem? Ken je verwante contexten? Wat betekent hier een verwant probleem?**

  Ken je nog figuren met rechte hoeken? Wat is de som van de hoeken van een rechthoek? 360°. Heeft onze tekening verband met een rechthoek? Kan ik er een rechthoek mee maken?

Maak een tekening. Duid zoveel mogelijk informatie erop aan die zou kunnen helpen.

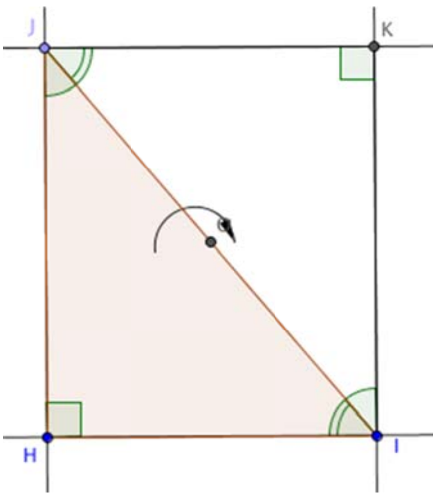
Welke theorie kan ons helpen i.v.m. rechthoeken?

Plan:

- plaats twee identieke rechthoekige driehoeken tegen elkaar zodat ze een vierhoek vormen; we vertalen dit meetkundig.
- we tonen aan dat de vierhoek een rechthoek is.
- we leiden de som van de hoeken in de rechthoekige driehoek eruit af.
- we gebruiken deze bevinding om de som van de hoeken in een willekeurige driehoek te bepalen.

Fase 3: Uitvoeren van het plan

We leggen twee identieke rechthoekige driehoeken tegen elkaar zodat ze een vierhoek vormen. Wiskundig vertaald wordt dat:



We roteren de figuur om het midden van de schuine zijde over 180° of we spiegelen de rechthoekige driehoek t.o.v. het midden van de schuine zijde.

Als we kunnen verklaren dat deze figuur een rechthoek is, dan is het probleem opgelost.

Plan: de vierhoek is

- een parallellogram
- de vier hoeken zijn recht

Welke taal gaan we kiezen om te spreken over een parallellogram? (lengtes van zijden, diagonalen, evenwijdigheid, …?) We overleggen samen met de leerlingen wat het meest strategisch is.

Met lengtes:

Vermits het twee identieke driehoeken zijn weten we zeker dat er lengtes overeenkomen:

$|JK| = |HI|$ en $|JH| = |IK|$ en dus hebben we dat de overstaande zijden even lang zijn.

OF

Met evenwijdigheid:

Puntspiegelen stuurt een rechte op een rechte die evenwijdig is:

HI // KJ en HJ // KI en dus hebben we dat overstaande zijden evenwijdig zijn.

OF

Met hoeken:

Overstaande hoeken zijn even groot? Dit kan eveneens verklaard worden met de puntspiegeling.

We kunnen dus concluderen dat we een parallellogram hebben.

- Welke kennis over evenwijdigheid en loodrechte stand kan me verder helpen? (**verband leggen met relevante kennis**)

Als een rechte loodrecht staat op één van twee evenwijdige rechten, dan ook op de tweede.

Fase 4: Reflectie

(deels hetzelfde als bij de eerste methode).

Zijn er nog andere manieren? Was dit ingewikkelder dan de vorige manier?

Wat betekent dat nu voor speciale driehoeken?

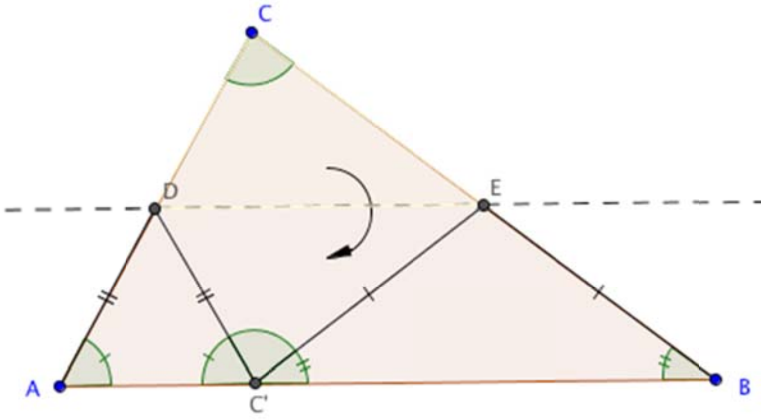
- gelijkzijdige
- gelijkbenige
- ….

Wat moeten we onthouden om de redenering te kunnen reconstrueren? (het plan)

Methode 3:

We doen een plooi-experiment met de leerlingen. We plooien een willekeurige driehoek t.o.v. de rechte die de middens van twee zijden verbindt. Er ontstaat een plooilijn. Waarom zou dit experiment ook een aanzet zijn tot een verklaring van de eigenschap in verband met de som van de hoeken van een driehoek?

Hier zullen de leerlingen waarschijnlijk niet zelf opkomen. Daarom is het interessant om hen kritische vragen te laten stellen en hen een plan van het oplossingsproces te laten bedenken. Dus een beetje omgekeerd redeneren.



ACTIE	KRITISCHE VRAGEN/ wiskundige vertaling
We plooien de tophoek van de driehoek t.o.v. de rechte die de middens van twee aanliggende zijden verbindt.	Vertaal dit in wiskunde? … (we spiegelen de hoek $\hat{C}$ t.o.v. de rechte DE)
We zien twee driehoeken verschijnen. Zijn de driehoeken bijzonder?	Waarom zijn die driehoeken gelijkbenig?
We vullen de tekening aan met kenniselementen.	Wat weet ik allemaal over gelijkbenige driehoeken?
We analyseren de situatie in C'. Waar is het hoekpunt C terechtgekomen?	Waarom ligt C' precies op AB? (Dat zal zo zijn als ΔCDE half zo hoog is als ΔCAB (Leerlingen kunnen intuïtief zien dat ΔCDE ~ ΔCAB maar kunnen dit nog niet beargumenteren in de eerste graad).
Waar zijn de drie hoeken van de oorspronkelijke driehoek ook zichtbaar?	Vormen ze samen een gestrekte hoek?

Dit zou dus een bewijs zonder woorden kunnen zijn, als we antwoord hebben gevonden op al die kritische vragen! Desnoods zonder verklaringen, indien dit te moeilijk zou zijn voor de leerlingen.

4.2.3 Bibliografie

Epp S. S. (1994). The role of Proof in Problem Solving. In A.H. Schoenfeld (Red.) *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale (N.J.): Erlbaum

Lakatos I (1976). *Proofs and refutations; The logic of Mathematical discovery.* Cambridge University Press

Polya G. (1957). *How to Solve It*. Princeton University Press

Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press

Stylianides G.J. en Stylianides A.J. (2006). "Making proof central to pre-highschool mathematics is an appropriate instructional goal": provable, refutable, or ubdecidable proposition? In J. Novotnà, H. Moroanova, M. Kratka, N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, (pp. 209-216). Prague: PME.

III - Meten en meetkunde

*"Meten is een van de meest rijke bronnen van het reken-wiskundeonderwijs. Meetsituaties laten zich goed gebruiken om kinderen uit te dagen en om ze te leren hun eigen wereld op een wiskundige manier in beeld te krijgen. Meten benadrukt de praktische waarde van de wiskunde." (*Freudenthal instituut, 2006)

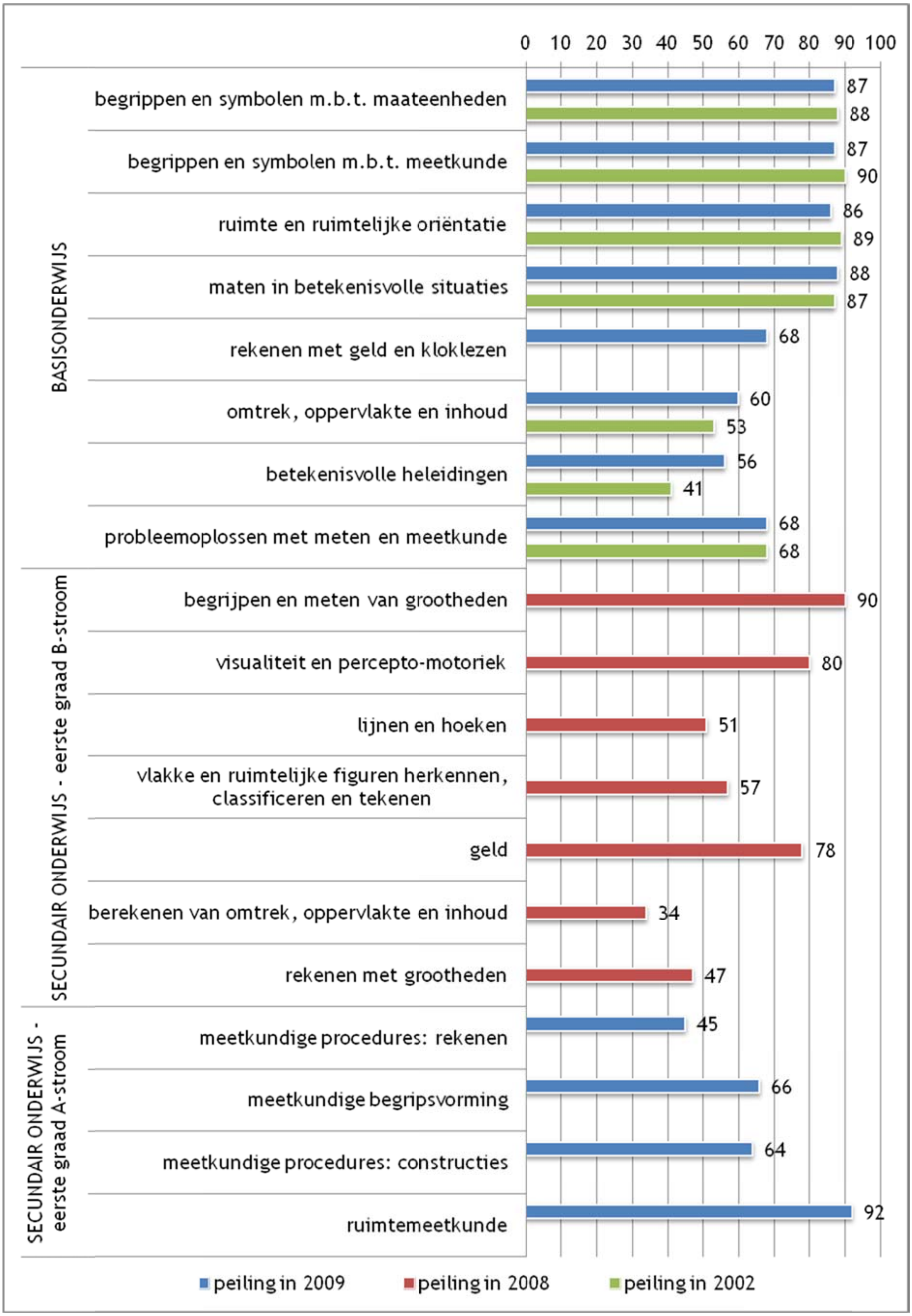
"Zowel in het dagelijks als professioneel leven wordt iedereen, jong en oud, passief en actief, geconfronteerd met meten, maten en meetresultaten. Meten in de meest ruime betekenis is een culturele vaardigheid ten dienste van persoonlijke redzaamheid." (OVSG, 1998, p.235)

Inhoudstafel

1 Peilingsresultaten

In Figuur 3.1 staan de resultaten op peilingstoetsen waarin eindtermen en ontwikkelingsdoelen aan bod kwamen over 'meten en meetkunde'. De resultaten op sommige van deze toetsen werden eerder ook aangehaald in het hoofdstuk over probleemoplossen. De bijlage bevat een volledig overzicht van de eindtermen en ontwikkelingsdoelen in de drie afgenomen peilingen.

Leerlingen in het basisonderwijs presteren zeer goed op vier peilingstoetsen in het domein 'meten en meetkunde'. Het gaat dan om toetsen die peilen naar de beheersing van begrippen en symbolen in verband met maateenheden en meetkunde, ruimtelijke oriëntatie en het gebruiken van maten in betekenisvolle situaties. Voor deze toetsen zijn de resultaten ook in lijn met de verwachtingen na de vorige peiling in 2002. Ongeveer twee derde van de leerlingen beheerst de eindtermen over rekenen met geld en kloklezen en probleemoplossen bij meten en meetkunde. Voor probleemoplossen werd ook het resultaat van 2002 bevestigd. 'Rekenen met geld en kloklezen' werd in 2002 niet afgenomen, omdat de euro nog niet lang was ingevoerd en kinderen zo nog wat meer tijd kregen om aan de euro te wennen.



Figuur 3.1: Peilingsresultaten voor Vlaamse eindtermen eindtermen over meten

Ook in de B-stroom waren de resultaten goed voor de peilingstoetsen over het begrijpen van grootheden en over het rekenen met geld. Leerlingen in het basisonderwijs en de B-stroom in de eerste graad van het secundair onderwijs beheersen duidelijk de eindtermen en ontwikkelingsdoelen over grootheden. In de A-stroom zijn er geen eindtermen (en dus ook geen peilingstoetsen over deze leerinhoud .Als de leerinhoud voldoende werd verworven is het terecht dat die niet opnieuw expliciet in de eindtermen aan bod komt.

In het basisonderwijs waren de resultaten voor de eindtermen over oppervlakte, omtrek en inhoud en voor betekenisvolle herheidingen duidelijk minder goed. De grootheid oppervlakte blijkt voor veel leerlingen in het basisonderwijs een lastig begrip. De resultaten voor de toets ‘oppervlakte, omtrek en inhoud’ zijn wel opvallend beter dan bij de vorige peiling. Ook in de eerste graad (A-stroom en B-stroom) blijven leerlingen moeite hebben met omtrek, oppervlakte en volume.

De resultaten op de toets ‘betekenisvolle herleidingen’ stemt tot nadenken. In 2002 bereikte slechts 56% van de leerling deze eindtermen, in 2009 is dat nog 41%. Het is de enige toets die in 2002 niet goed werd afgelegd en waar geen vooruitgang is geboekt in de herhalingspeiling in 2009.

Toetsen waarin gepeild werd naar de eindtermen over driedimensionale leerinhouden, werden in het basisonderwijs en de A-stoom erg goed afgelegd. In de B-stroom was er geen toets met alleen ontwikkelingsdoelen hierover.

Net als in het basisonderwijs zijn er in de A-stroom en de B-stroom van de eerste graad voor het domein ‘meten en meetkunde’ één of meer peilingstoetsen waarop leerlingen in dit domein goed tot heel goed presteren, en zijn er ook altijd toetsen waar een grote groep, tot zelfs de meerderheid van de leerlingen, de getoetste doelen niet bereikt. Dit betekent dat in het basisonderwijs en de eerste graad van het secundair onderwijs een aanzienlijk groep niet alle minimumdoelen over meten en meetkunde beheerst. Een groot deel van deze leerlingen gaat naar een volgend onderwijsniveau zonder de leerinhouden te beheersen die leraren daar mogen verwachten.

2 Reflectie over de resultaten door AKOV

2.1 Vergelijking van de resultaten met peilingen in Nederland

In wat volgt worden de resultaten van een aantal Nederlandse peilingstoetsen naast die van Vlaamse peilingstoetsen gelegd. In 1986 is in Nederland in opdracht van de Minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen het project Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) gestart, het wordt uitgevoerd door Cito (van der Schoot, 2008). Peilingen worden in Nederland uitgevoerd op het einde van het primair onderwijs, dit is het basisonderwijs. Voor ‘Nederlandse taal’ en ‘rekenen-wiskunde’ zijn er ook peilingonderzoeken halverwege het basisonderwijs (in jaargroep 5, dit is in Vlaanderen het derde leerjaar). De PPON resultaten worden in de eerste plaats gelegd naast die van de Vlaamse wiskundepeiling in het basisonderwijs. Waar mogelijk worden de resultaten ook vergeleken met resultaten uit de eerste graad van het secundair onderwijs.

In PPON (Janssen e.a., 2005) wordt op elke toets een standaard ‘minimum’, ‘voldoende’ en ‘gevorderd’ geplaatst. De standaard ‘voldoende’ wordt als de belangrijkste voor het onderwijs beschouwd, 75% van de leerlingen moet die kunnen bereiken. Voor de vergelijking tussen resultaten uit Vlaanderen en Nederland wordt steeds de Nederlandse standaard ‘voldoende’ gebruikt, en wordt alleen gebruik gemaakt van de peilingen op het einde van het gewoon basisonderwijs in beide onderwijssystemen.

Het is onmogelijk om een sluitende vergelijking tussen de peilingen in Vlaanderen en Nederland te maken: het Nederlandse peilingsonderzoek heeft vergelijkbare onderzoeksdoelen als het Vlaamse, maar neemt vanzelfsprekend de kerndoelen van het Nederlandse onderwijs als uitgangspunt. Vlaamse peilingen zijn gestoeld op de Vlaamse eindtermen en ontwikkelingsdoelen. Dankzij een aantal overeenkomsten in het Nederlandse en het Vlaamse curriculum, kunnen we resultaten van beide peilingen vergelijken. De domeinen en toetsen van de Nederlandse peiling zijn niet hetzelfde ingedeeld als de domeinen en toetsen van de Vlaamse peiling. In veel gevallen zal het daarom nodig zijn om een aantal toetsen van één of beide peilingen te combineren.

In Nederland werd in 1987 voor het eerst gepeild naar wiskunde op het einde van het basisonderwijs, en werden herhalingspeilingen afgenomen in 1992, 1997 en 2004. In Nederland is het dus mogelijk om de peilingsresultaten van vier peilingen te vergelijken. Waar mogelijk worden ook de trends in het domein 'meten en meetkunde' mee besproken in de tekst. In Vlaanderen werd er voor het eerst gepeild naar wiskunde in het basisondewijs in 2002, in 2009 werd de eerste herhalingspeiling georganiseerd. Hoewel er significante verschillen kunnen worden waargenomen op een aantal toetsen, is het te vroeg om al te spreken van waarneembare trends.

2.1.1 Ruimte en ruimtelijke oriëntatie

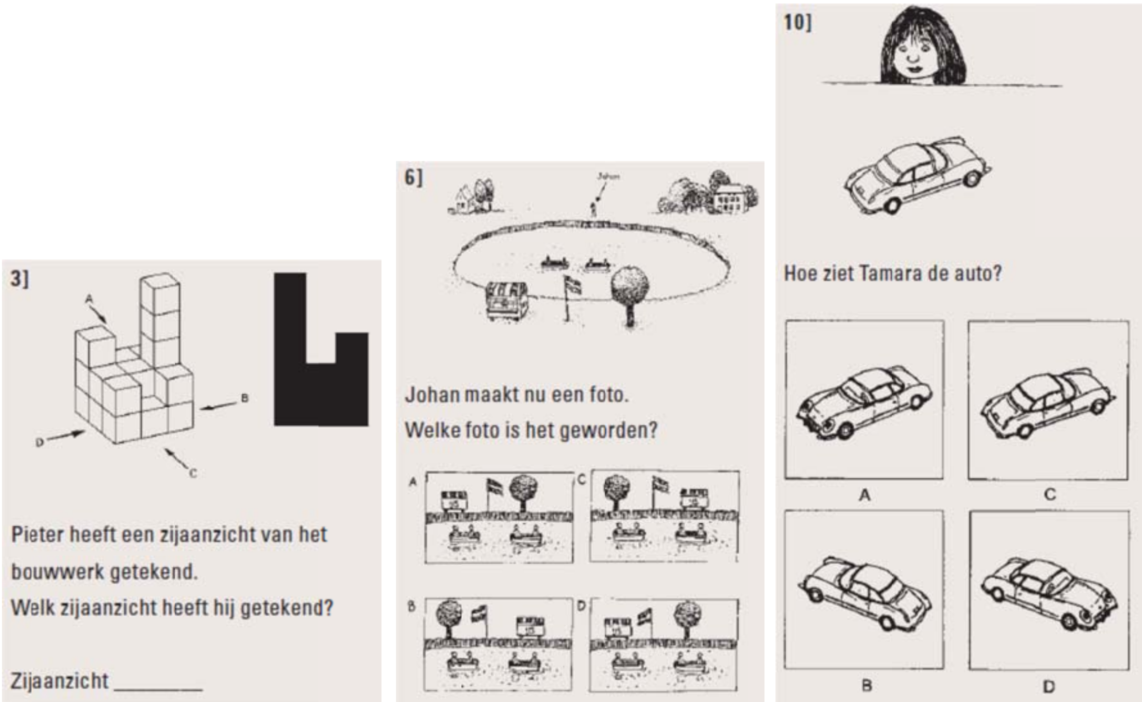
In Vlaanderen bereikt 89% van de leerlingen de eindtermen over 'ruimte en ruimtelijke oriëntatie'. De inhoud van de Vlaamse peilingstoets 'ruimte en ruimtelijke oriëntatie' (89%) komt in grote mate overeen met de Nederlandse PPON toets 'meetkunde' (62%). Leerlingen in Vlaanderen beheersen deze eindtermen goed. Voor de Vlaamse resultaten staan de getoetste eindtermen per toets in bijlage 1. De resultaten van de Nederlandse peiling zijn voor de toets 'meetkunde' opvallend lager dan in Vlaanderen. Algemeen zijn de resultaten in de Nederlandse wiskundepeiling lager dan in de Vlaamse peilingen in het basisonderwijs. De norm die in de Nederlandse peilingen bepaalt hoeveel leerlingen een standaard bereiken, is strenger dan de norm in de Vlaamse peilingen. De PPON-toets 'meetkunde' is een van de betere resultaten van de peiling in Nederland. Ook in Vlaanderen zijn de resultaten heel goed voor de toets over ruimte en ruimtelijke oriëntatie.

De Vlaamse eindtermen van het basisonderwijs die aan bod komen in de toets over 'ruimte en ruimtelijke oriëntatie' gaan over begrippen en notaties waarmee een ruimte meetkundig wordt bepaald, zoals links, midden, bovenaanzicht … Leerlingen moeten die begrippen kunnen gebruiken in twee- en driedimensionale modellen van de werkelijkheid, zoals kaarten, plattegronden en schaalmodellen. Leerlingen moeten zich ook kunnen oriënteren, en mentaal verplaatsingen maken in de ruimte.

De onderzoekers van PPON stellen bij de toets 'meetkunde' dat het gaat om eenvoudige noties en begrippen waarmee de ruimte meetkundig geordend, beschreven en verklaard kan worden. Daarbij stellen de Nederlandse onderzoekers dat het niet goed mogelijk is om een ontwikkelingslijn te construeren op basis van de relatieve moeilijkheidsgraad van de opgaven, omdat de opgaven een beroep doen op een breed scala van vaardigheden. Hetzelfde geldt voor de opgaven in de Vlaamse peilingen.

In de Vlaamse peilingstoets 'ruimte en ruimtelijke oriëntatie' moeten leerlingen onder andere afbeeldingen koppelen aan een standpunt in de ruimte. Ze beheersen deze vaardigheid. Het PPON vraagt vergelijkbare vaardigheden van de leerlingen in Nederland. Hieronder staan 3 voorbeelden van opgaven uit PPON die beroep doen op deze vaardigheden. De voorbeeldopgaven staan in toenemende moeilijkheidsgraad.

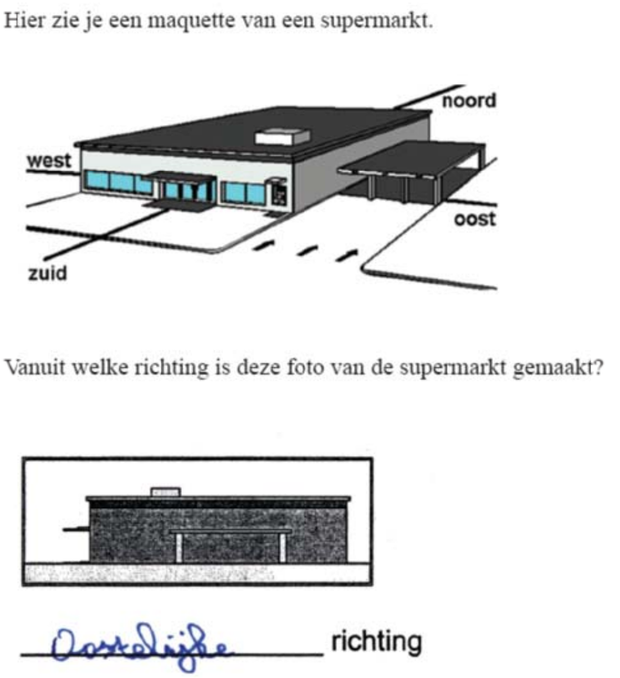
Voor de vraag 6 van PPON voldoet drie kwart van de leerlingen in Nederland. Op basis van de criteria die in Vlaanderen gebruikt worden om de opgaven in te delen in basisopgaven (die de leerlingen moeten beheersen om de eindtermen te bereiken) en bijkomende opgaven (die verder gaan dan de eindtermen), is vraag 10 voor de Nederlandse leerlingen een bijkomende opgave.



PPON

Leerlingen in Vlaanderen kregen vergelijkbare opgaven in de wiskundepeilingen in 2002 en 2009.

De voorbeeldvraag over de maquette van de supermarkt was een basisvraag in 2002, 84% van de leerlingen beantwoordde deze vraag correct.

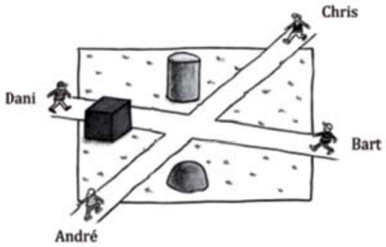


BaO

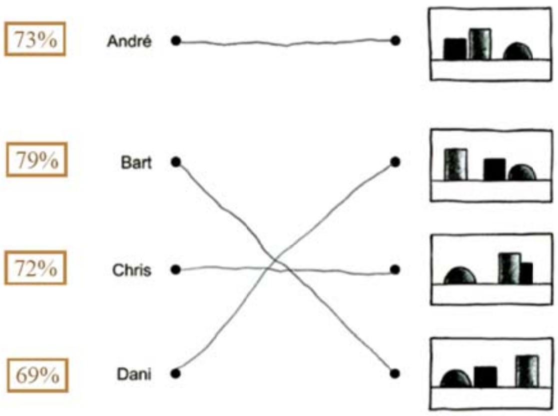
De vraag over het blokkenpark was in de peiling van 2009 een bijkomende vraag (die verder gaat dan de eindtermen verwachten). Het percentage leerlingen dat het juiste beeld verbond met een naam staat voor elke naam: 62% van de leerlingen maakte vier juiste verbindingen, 1% van de leerlingen liet de vraag open.

In het blokkenpark stappen André, Bart, Chris en Dani naar het kruispunt. Omdat de kinderen elk uit een andere richting komen, zien zij de blokkenbouwsels op een andere manier.

GA 1%



Verbind de namen van de kinderen met de manier waarop zij de blokken zien.



BaO

In Nederland is er sinds 1987 geen significante verandering in de resultaten op de toets over ‘meetkunde’. In Vlaanderen was de toets goed in 2002 (86%), en werden de resultaten nog significant beter in 2009 (89%). Het lijkt er ook op dat de leerlingen uit het basisonderwijs vertrekken met een solide basis voor ruimtemeetkunde in de eerste graad van het secundair onderwijs: op de peilingstoets in de A-stroom behaalde 92% van de leerlingen de eindtermen ‘ruimtemeetkunde’. De toets over ‘visualiteit en percepto-motoriek’ (80%) bevat ook ontwikkelingsdoelen waarbij leerlingen vragen beantwoorden over ruimtelijk inzicht. Uit de inhoudelijke analyse van de peilingsresultaten blijkt dat leerlingen van de B-stroom ook ruimtelijke figuren als kubus, balk, piramide en cilinder wel herkennen.

2.1.2 Maten in betekenisvolle situaties

De inhoud van de Vlaamse peilingstoets ‘maten in betekenisvolle situaties’ (87%) komt in grote lijnen overeen met de Nederlandse PPON toets ‘meten: toepassingen’ (50%). Leerlingen in Vlaanderen beheersen deze eindtermen goed.

De enige eindterm uit het basisonderwijs die aan bod komt in deze toets vraagt dat leerlingen veelvoorkomende maten in verband kunnen brengen met betekenisvolle situaties.

De Nederlandse onderzoekers zeggen over de toets ‘meten: toepassingen’ dat leerlingen er complexere meetproblemen in moeten oplossen. Leerlingen moeten zelf beslissen welke grootheid ze in een gegeven situatie moeten gebruiken, en in andere opgaven moeten leerlingen samengestelde grootheden als ‘snelheid’ of ‘verbruik’ begrijpen. Het is mogelijk dat leerlingen daarvoor kennis en vaardigheden (bijvoorbeeld breuken) uit een ander domein (getallen en bewerkingen) moeten gebruiken. Leerlingen moeten in deze toets soms meerdere bewerkingen uitvoeren. Net zoals in de Vlaamse peilingen maken minder leerlingen de opgaven correct als ze meerdere bewerkingen moeten uitvoeren om het resultaat te vinden. Leerlingen in Nederland moeten in deze toets wat meer rekenen dan de leerlingen in Vlaanderen. Het gaat niet om herleidingen tussen eenheden, eerder om opgaven die in Vlaanderen aan bod komen in de toets over ‘probleemoplossen bij meten en meetkunde’.

In Vlaanderen beantwoordt 79% van de leerlingen deze basisopgave uit de wiskundepeiling van het basisonderwijs juist.

> Vul de juiste maateenheid in.
>
> 150 . . . bloem is genoeg om een lekkere cake te bakken.
>
> BaO

In de Nederlandse peiling is vraag 9 ook een basisopgave die beroep doet op vergelijkbare ervaringskennis als de basisvraag uit de Vlaamse peiling.

Vraag 11 is een voorbeeld van een opgave waarbij de leerlingen meer dan een bewerking moeten uitvoeren. Op basis van de criteria die in Vlaanderen gebruikt worden om de opgaven in te delen, liggen beide opgaven voor de Nederlandse leerlingen boven de toetsnorm ‘voldoende’.

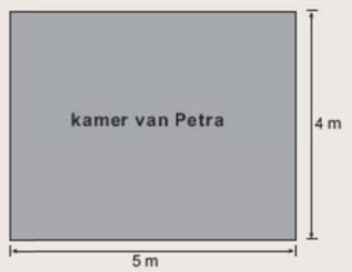
Vergelijkbare opgaven zijn in Vlaanderen ook bijkomende opgaven die verder gaan dan wat de eindtermen vragen.

9]

Wat moet achter 7,2 staan?

A	cm	C	m
B	cm^2	D	m^2

11]



Petra krijgt een kurkvloer op haar kamer.
Bruine kurktegels kosten € 39,– per m^2.
Grijze kurktegels kosten € 59,– per m^2.
Hoeveel gulden bespaart Petra als zij de bruine tegels koopt?

€ ______

PPON

In Vlaanderen beantwoordt 51% van de leerlingen volgende bijkomende opgave juist.

> Lees aandachtig en vul dan de juiste maateenheid in.
>
> We wonen in de stad. Ons voortuintje is 15 . . . groot.
>
> BaO

Sinds 1987 verlagen de resultaten van de leerlingen in Nederland significant op de toets over ‘meten: toepassingen’. In Vlaanderen waren de resultaten op de toets over ‘maten in betekenisvolle situaties’ in 2002 ongeveer even goed als in 2009, er is geen significant verschil.

2.1.3 Oppervlakte, omtrek en inhoud

De verdeling van de leerinhouden over de toetsen gebeurt in Nederland en Vlaanderen niet op dezelfde manier. Voor de volgende toetsen is er een grote overeenkomst in de inhouden van deze gecombineerde toetsen, maar het is niet mogelijk om per toets in Vlaanderen een overeenkomstige Nederlandse toets te vinden.

Vlaamse peilingstoetsen:

‘oppervlakte, omtrek en inhoud’ (60%)

‘probleemoplossen bij meten en meetkunde’ (68%)

en in mindere mate ook

‘referentiepunten’ (70%)

‘afronden, benaderen en’ schatten’ (63%)

Naast de Nederlandse PPON toetsen:

‘meten: lengte’ (38%)

‘meten: oppervlakte’ (21%)

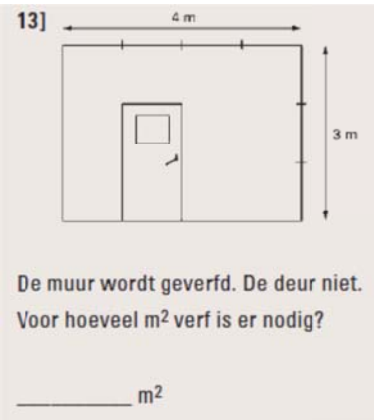
‘meten: inhoud’ (42%)

Bij de Vlaamse toetsen over ‘referentiepunten’ en ‘afronden, benaderen en schatten’ worden ook enkele vragen gesteld die in Nederland aan bod komen in de toets ‘meten: gewicht’. Deze toets komt hier niet aan bod. De nadruk ligt in de bespreking op de toets over ‘oppervlakte, omtrek en inhoud’, waarbij de leerlingen in Vlaanderen de oppervlakte en de omtrek van veelhoeken en willekeurige vlakke figuren moeten kunnen bepalen, en leerlingen ook inzicht moeten hebben in het volume van een balk.

De onderzoekers van PPON geven ook de getoetste inhouden aan. Bij de toets over ‘lengte’ moeten leerlingen de lengte van voorwerpen of tussen plaatsen vergelijken, meetinstrumenten voor lengte kunnen gebruiken, eenheden voor lengte gebruiken en de omtrek van regelmatige en onregelmatige figuren berekenen. Ook opgaven over schaalaanduidingen horen in Nederland bij deze toets. Bij de toets over ‘oppervlakte’ moeten leerlingen in Nederland vergelijkingen maken over oppervlakte, oppervlakte bepalen met een ongestandaardiseerde maat, een gepaste eenheid kiezen, oppervlakte berekenen en herleidingen uitvoeren. Bij de toets over ‘inhoud’ moeten leerlingen in Nederland inhoudsvergelijkingen uitvoeren en inhoudsaanduidingen vergelijken, schaalverdeling van maatbekers aflezen, inhouden bepalen met behulp van een blokje als natuurlijke maat, een juiste inhoudsmaat kiezen in een herkenbare context en herleidingen uitvoeren met veel voorkomende inhoudsmaten. Dit laatste wordt aan de leerlingen in Vlaanderen gevraagd in de toets over ‘betekenisvolle herleidingen’.

In de brochure over de peilingsresultaten van wiskunde in het Vlaamse basisonderwijs staat: “*Omtrek, oppervlakte, inhoud, volume … zijn voor een kwart van de leerlingen moeilijke begrippen. Sommige leerlingen verwarren verwante grootheden als omtrek en oppervlakte, of ze verwarren de formules ervan in een gegeven situatie*.” Dit geldt ook voor de leerlingen in de B-stroom.

In het Nederlandse peilingsonderzoek behoort volgende vraag 13 uit de PPON-toets ‘oppervlakte’ volgens de criteria in Vlaanderen niet meer tot de opgaven die een leerling moet beheersen om de standaard ‘voldoende’ te bereiken. In Vlaanderen moeten leerlingen een gelijkaardige vraag wel kunnen oplossen om de toetsnorm te behalen in de toets ‘probleemoplossen bij meten en meetkunde’.



PPON

Ook in de B-stroom van de eerste graad in het secundair onderwijs wordt van leerlingen gevraagd dat zij omtrek, oppervlakte en inhoud berekenen. Veel van deze leerlingen slagen er niet in om deze grootheden te berekenen van veelvoorkomende en regelmatige figuren. Bij rechthoeken worden de grootheden omtrek en oppervlakte verward. Dit kan enkel gebeuren als de leerlingen de eenheid van het resultaat niet interpreteren. Leerlingen doen het niet beter als ze de formule gegeven krijgen voor omtrek of oppervlakte van een cirkel. Bij het volume van een balk rekenen de leerlingen opvallend beter dan bij het volume van een kubus. Ook in de A-stroom kunnen leerlingen beter het volume van een balk berekenen dan van een kubus. Bij de peiling in de A-stroom van de eerste graad in het secundair onderwijs wordt het slechte resultaat (45%) op de toets 'meetkundige procedures: rekenen' toegeschreven aan de zwakke beheersing van de eindterm over omtrek, oppervlakte en volume.

Slechts 34% van de leerlingen in de B-stroom bereikt de ontwikkelingsdoelen over omtrek, oppervlakte en inhoud. Voor veel beroepen is inzicht in deze grootheden belangrijk.

In Nederland zijn de resultaten van de leerlingen op het einde van het basisonderwijs over de vier peilingen (1987, 1992, 1997, 2004) nagenoeg constant gebleven in de drie toetsen over meten (lengte, oppervlakte en inhoud). In Vlaanderen zijn er grote verschillen: op de toetsen over referentiepunten, afronden, benaderen en schatten, en probleemoplossen bij meten en meetkunde bleven de resultaten ook ongeveer gelijk, op de toets over 'oppervlakte, omtrek en inhoud' steeg het aantal leerlingen dat de eindtermen bereikt van 53% in 2002 tot 60% in 2009.

2.1.4 Geld & tijd

Vlaamse peilingstoetsen:

'rekenen met geld en kloklezen' (68%)

Nederlandse PPON toetsen:

'tijd' (50%)

'geld' (42%)

In de Vlaamse en de Nederlandse toetsen over tijd moeten leerlingen rekenen met tijd in situaties die voor kinderen herkenbaar zijn. In beide toetsen komen telkens analoge en digitale klokaanduidingen voor. Leerlingen in Nederland moeten in de toets over tijd ook herleidingen uitvoeren, terwijl dat in de Vlaamse peiling een aparte toets is, die in de volgende paragraaf aan bod komt.

In de Nederlandse toets over geld moeten leerlingen toepassingsgericht rekenen met geld. Zij moeten daarbij gepast kunnen betalen, de waarde van munten en biljetten bepalen en wisselgeld bepalen. In de Nederlandse peiling wordt van leerlingen ook gevraagd om kleine bedragen bij te passen om het teruggeven van wisselgeld te vergemakkelijken, en bedragen in euro om te rekenen naar andere valuta. Deze laatste twee soorten opgaven komen niet aan bod in de Vlaamse peilingen.

Vraag 8 hierna is een vraag uit het Nederlandse onderzoek die volgens de Vlaamse criteria onder de toetsnorm ligt, in Vlaamse termen is dit een basisopgave. Vlaamse leerlingen kregen in de peiling een vergelijkbare opgave. Drie kwart van de leerlingen beantwoordde deze goed.

8]

Carla werkt in de supermarkt achter de kassa. Ze geeft altijd zo weinig mogelijk munten terug. Mevrouw de Wit moet € 6,98 betalen en ze betaalt met een briefje van 10 euro.
Hoeveel munten geeft Carla terug?

________ munten

PPON

De resultaten op de toets over ‘tijd’ bleven over de jaren ongeveer gelijk in Nederland. Net als in Vlaanderen werd in Nederland beslist om kort na de invoering van de euro geen peilingstoets over ‘geld’ af te nemen.

In de B-stroom van het secundair onderwijs was er ook een toets over ‘geld’. De opgaven waren ook in deze toets over situaties waarin leerlingen in hun dagelijks leven kunnen terechtkomen. De leerlingen legden deze toets goed af: 78% van de leerlingen bereikt de ontwikkelingsdoelen.

2.1.5 Herleidingen in betekenisvolle situaties

De inhoud van de Vlaamse peilingstoets ‘herleidingen in betekenisvolle situaties’ wordt in PPON gepeild in verschillende toetsen, maar komt in deze bespreking apart aan bod: de Vlaamse leerlingen hebben met dit aspect van ‘meten en meetkunde’ duidelijk veel moeite, nog meer dan de leerlingen van dezelfde leeftijd bij de vorige peiling wiskunde in het basisonderwijs. Verschaffel en Depaepe (K.U.Leuven, 2010) begrijpen de achteruitgang op deze toets: het systeem van herleidingen werd vroeger volledig aangeleerd, en grondig ingeoefend. Leerlingen leren nu niet meer alle voorvoegsels die kunnen voorkomen bij eenheden (kilo-, hecto-, deca-, deci-, cent-, milli-) zodat de systematiek voor hen mogelijk niet voldoende duidelijk is. Zij oefenen ook minder de omzettingen: de nadruk ligt op herleidingen die betekenisvol zijn. Hiermee komen de ‘dril'-oefeningen van vroeger nu niet meer algemeen voor. Marleen Duerloo gaat hier verder in dit hoofdstuk op in.

Leerlingen in Nederland herleiden ook niet probleemloos: voor deze vraag uit ‘meten: lengte’ geeft 57 % van de leerlingen het juiste antwoord. In Vlaanderen beantwoordt 74% van de leerlingen een gelijkaardige basisopgave juist in de peiling wiskunde voor het basisonderwijs.

8] Een balk is $6\frac{1}{2}$ cm dik.
Hoeveel mm is dat?

________ mm

PPON

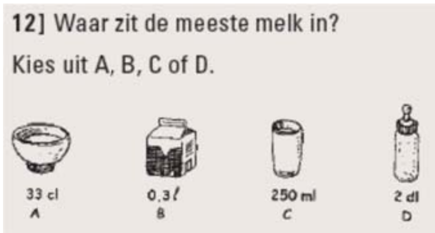
Van 1 ananas kan Dorien 400 ml ananassap maken.

Hoeveel van die ananassen moet Dorien gebruiken om ongeveer twee liter sap te krijgen?

. . . ananassen.

BaO

Leerlingen in Nederland moeten ook opgaven over inhoudsmaten oplossen in de toets over 'meten: inhoud'. Beide voorbeeldopgaven 11 en 12 zijn voor de Nederlandse leerlingen opgaven die ze moeten kunnen oplossen om de standaard 'voldoende' te halen. De gemiddelde leerling in het PPON heeft ongeveer de helft kans om deze twee opgaven goed op te lossen. De Nederlandse onderzoekers besluiten daaruit dat de gemiddelde leerling elementaire herleidingen met ml, dl en liter slechts zeer matig beheerst.



PPON

Er is een andere mogelijke reden waarom leerlingen de grootheden oppervlakte en volume minder goed onder de knie krijgen: leerlingen maken niet steeds het onderscheid tussen grootheden waarvan het maatgetal lineair kan worden omgezet, zoals lengte, en grootheden waarbij dat niet het geval is, zoals oppervlakte en volume. Deze verwarring is bij onderzoekers bekend als de 'illusie van lineariteit'.

2.2 Illusie van lineariteit

De wiskundepeilingen tonen aan dat leerlingen heel wat moeite hebben met omtrek, oppervlakte en volume, zowel in het basisonderwijs als in de A- en B-stroom van de eerste graad secundair onderwijs. Formules zijn niet gekend, of voor een oppervlakte wordt een omtrekformule gebruikt en vice versa. Leerlingen hebben kennelijk weinig gevoel voor de dimensie van omtrek, oppervlakte en volume en hoe die dimensie vertaald wordt in formules, die niet opgenomen zijn in de eindtermen van het basisonderwijs, maar wel in de verschillende leerplannen.

De Bock e.a. (1999) namen een toets af met opgaven over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren bij een grote groep 12-à 13-jarigen en een grote groep 15-à 16-jarigen. De ene helft van de toetsvragen kon via lineair proportioneel redeneren (de regel van drie, rechtevenredigheid) correct opgelost worden, de andere helft niet. Een opgave waarbij het gebruik van rechtevenredigheid tot een fout antwoord leidde, is bijvoorbeeld het vraagstuk in Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Niet-proportioneel vraagstuk uit De Bock, Verschaffel en Janssens (1997)

Een boer heeft 8 uur nodig om zijn vierkant stuk land met een zijde van 200 meter te bemesten. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een gelijkaardig vierkant stuk land met een zijde van 600 meter te bemesten?

De proportionele opgaven werden bijna altijd correct opgelost, maar van de niet-proportionele vragen werd bij de 12-à 13-jarigen minder dan 5%, en bij de 15-à 16-jarigen minder dan 20% van de opgaven correct beantwoord. Bijna alle fouten waren te wijten aan een foutieve lineaire redenering. Bij het vraagstuk in Tabel 3.1 gaven heel wat leerlingen '24 uur' als antwoord, want '3 x 200 = 600, dus 8 x 3 = 24'. De suggestie om een tekening te maken of het aanbieden van een correcte tekening bij zulke opgaven leidde niet tot een spectaculaire toename van het aantal juiste antwoorden.

Het zien en toepassen van rechtevenredige verbanden in situaties waarin het niet geoorloofd is, wordt de illusie van lineariteit genoemd.

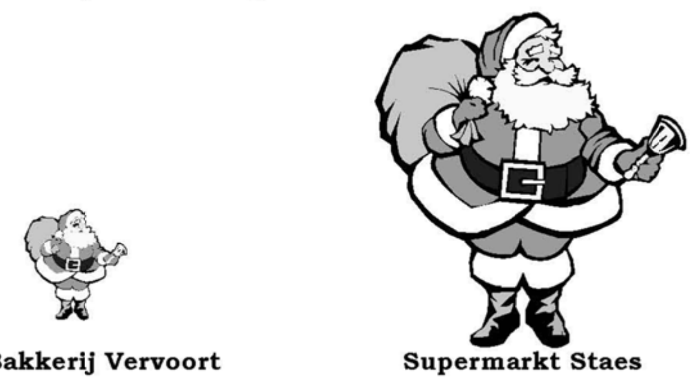
In een verdere studie gingen De Bock e.a. (2003) op zoek naar de oplossingsprocessen die achter de onterechte lineaire redeneringen van leerlingen schuilgingen. Ze interviewden daarvoor een groep van 40 leerlingen rond niet-lineaire problemen, bijvoorbeeld de opgave in Figuur 3.2.

Aanvankelijk gaven slechts 2 van de 40 leerlingen het correcte antwoord. De andere leerlingen gaven het lineaire antwoord. Ze verklaarden hun oplossing door de verhouding van de hoogtes van de twee kerstmannen te berekenen en die verhouding toe te passen op de hoeveelheid verf die nodig is; 168 : 56 = 3, dus er is 3 x 6 ml of 18 ml verf nodig. Via opeenvolgende hints werd geprobeerd deze leerlingen op het juiste spoor te brengen. Eén van de hints was bijvoorbeeld: 'een leerling legde me uit dat als de tekening van de kerstman drie keer groter wordt, niet alleen de hoogte maar ook de breedte met drie wordt vermenigvuldigd. Je hebt dus negen keer zoveel verf nodig en daarom antwoordde die leerling 54 ml." Deze correcte redenering overtuigde 14 leerlingen om van antwoord te veranderen. Uiteindelijk bleef, na een maximum van 4 hints, nog 20% van de leerlingen bij het foute antwoord.

Bart werkt voor een bedrijf dat reclametekeningen schildert op de etalageruiten van winkels. Tijdens de afgelopen kerstdagen moest hij vaak kerstbomen, kerstmannen, sterren en sneeuwmannen op de ramen schilderen.

Op een dag moest hij een tekening van een kerstman van 56 cm hoog op de glazen winkeldeur van bakkerij Vervoort schilderen. Hiervoor had hij 6 ml verf nodig.

Daarna moest hij een veel grotere versie van diezelfde kerstman schilderen op de etalageruit van supermarkt Staes. Die kerstman moest 168 cm hoog zijn. Hoeveel ml verf had Bart hier ongeveer voor nodig?



Figuur 3.2. Opgave uit vervolgonderzoek De Bock e.a. (2003)

De Bock e.a. ontdekten bij dit onderzoek 4 categorieën van foute redeneringen die door leerlingen gemaakt werden.

Een eerste categorie verwijst naar het intuïtieve karakter van het lineaire model: het wordt beschouwd als vanzelfsprekend en spontaan, haast onbewust toegepast. Leerlingen hebben daardoor ook niet de behoefte om de keuze voor dit model te rechtvaardigen.

Een tweede categorie vormt de bewuste en weloverwogen toepassing van het lineaire model. Voor sommige leerlingen is elke toename automatisch lineair. Deze leerlingen zijn er rotsvast van overtuigd dat het lineaire model het juiste is.

Een derde categorie heeft te maken met hiaten in de meetkundige kennis. Het onderzoek van De Bock e.a. bracht naar voren dat heel wat leerlingen moeite hebben met concepten zoals gelijjkvormigheid of oppervlakte, in het bijzonder bij onregelmatige figuren.

Ten vierde bleken heel wat leerlingen foute gewoonten en opvattingen te hebben over het opàlossen van wiskundige problemen, zoals: je kunt je beter baseren op formules dan op tekeningen, je blijft best bij je eerste idee, vraagstukken hebben niets met de realiteit te maken, bij het oplossen van vraagstukken wordt enkel verwacht dat je een of enkele standaardbewerkingen uitvoert.

De Bock en Van Dooren (2006) geven kort een aantal mogelijkheden om te werken aan de illusie van lineariteit. Wiskunde moet zo realistisch mogelijk gemaakt worden. Leerlingen moeten bijvoorbeeld niet abstract berekenen hoeveel tegels ze moeten kopen om de vloer van de klas mee te bedekken, ze moeten dit ook op schaal uittesten. Bij de meer abstracte vraagstukken vragen leerlingen zich immers veel vaker af of ze nu lineair moeten rekenen of niet. Deze concretere aanpak moet goed in tijd verspreid worden om te beklijven.

2.3 Meetkunde

Leerlingen maken in het basisonderwijs voor het eerst kennis met meetkundige begrippen. Uit de toets over ‘begrippen en symbolen met betrekking tot meetkunde’ blijkt dat leerlingen punten, lijnen, hoeken, vlakke figuren, veelvlakken, bollen en cilinders kunnen herkennen. Leerlingen kunnen ook hoeken classificeren als scherp, stomp en recht, ze kunnen een cirkel correct tekenen en drie kwart van de leerlingen slaagt erin om zelf een eenvoudige geometrische figuur te construeren als daarvan een aantal eigenschappen gegeven zijn. 90 % van de leerlingen in het basisonderwijs bereikt deze eindtermen hierover, dit zou hen een solide basis moeten geven voor verdere meetkundige inzichten in het secundair onderwijs.

De resultaten van de eerste graad geven een ander beeld. De eindtermen in de toets ‘meetkundige begripsvorming’ (66%) in de A-stroom en de ontwikkelingsdoelen in de toetsen ‘lijnen en hoeken’(51%) en ‘vlakke figuren en ruimtelijke figuren herkennen, classificeren en tekenen’ (57%) van de B-stroom bouwen voort op de eindtermen uit de toets ‘begrippen en symbolen met betrekking tot meetkunde’ uit het basisonderwijs. Heel wat van de leerlingen die in het basisonderwijs goed mee waren, hebben in de eerste graad van het secundair onderwijs afgehaakt.

Bij de wiskundepeiling in de A-stroom werd aan de leerkrachten gevraagd welke eindtermen nog niet aan bod kwamen in de lessen wiskunde van de eerste graad. Deze informatie is in detail opgenomen in de brochure met de peilingsresultaten van de eerste graad A-stroom (p. 22). Veel leerkrachten uit de A-stroom van de eerste graad geven aan dat heel wat eindtermen over meetkunde op het moment van de peiling (27 mei 2009) nog niet aan bod kwamen in de wiskundelessen (Tabel 3.2).

In de toets over ‘meetkundige begripsvorming’ wordt er gepeild naar zes eindtermen. Volgens de leerkrachten werden vijf eindtermen (nog) niet bij alle leerlingen behandeld op het einde van de eerste graad. Bij eindterm 27 (onder andere over gelijkvormigheid en congruentie) gaat het om 15% van de leerlingen.

In de toets over ‘meetkundige procedures: rekenen’ werden drie eindtermen getoetst. Twee ervan werden niet door alle leerlingen in de A-stroom gezien. Eindterm 34 gaat over omtrek, oppervlakte en volume berekenen. Het is deze eindterm waar bij de inhoudelijke analyse van de peilingsresultaten over gezegd werd, dat die de mindere resultaten van deze toets veroorzaakt, de leerlingen beheersen deze eindterm duidelijk onvoldoende. Het is daarom niet duidelijk waarom deze eindterm niet aan bod komt in de wiskundelessen van de A-stoom in de eerste graad: bij de eerste peiling wiskunde in het basisonderwijs (2002) bereikte ook bijna de helft van de leerlingen de eindtermen over oppervlakte, omtrek en inhoud niet. Het was m.a.w. voor het secundair onderwijs duidelijk dat dit niet verworven is bij een (behoorlijk) aantal leerlingen die starten in de eerste graad.

Eindtermen die niet behandeld worden in de eerste graad kunnen mogelijk de resultaten op de peilingstoetsen over meetkunde verklaren, maar eindtermen zijn minimumdoelen voor alle leerlingen in de A-stroom en moeten aangeboden worden aan alle leerlingen.

Bij de derde toets uit het domein 'meetkunde' is er mogelijk iets anders aan de hand: ook daar werden bij aanzienlijke aantallen leerlingen de eindtermen over ruimtemeetkunde einde mei 2009 nog niet behandeld. Niettemin is het de best afgelegde toets door de leerlingen in de A-stroom van de eerste graad: 92% van de leerlingen bereikt hier de gestelde norm. In dit geval is het mogelijk dat leerkrachten na aftoetsing van deze leerinhouden weten dat hun leerlingen deze eindtermen beheersen. In dat geval is het zinvol om de beschikbare onderwijstijd te besteden aan eindtermen die de leerlingen nog niet beheersen.

Tabel 3.2: Percentage leerlingen per optiegroep en in de totale steekproef waarbij op 27 mei 2009 eindtermen uit drie peilingstoetsen nog niet werden aangebracht in de lessen wiskunde

Eindterm-nummer	**klassieke talen**	**moderne wetenschappen**	**technische opties**	**Totale steekproef**
Meetkundige begripsvorming				
ET 27	13	13	17	**15**
ET 28	0	0	6	**2**
ET 31	7	10	3	**7**
ET 37	2	2	8	**4**
ET 40	5	4	5	**5**
Meetkundige procedures: rekenen				
ET 33	7	7	10	**8**
ET 34	23	20	28	**24**
Ruimtemeetkunde				
ET 29	25	30	40	**32**
ET 30	17	22	30	**24**
ET 36	30	26	39	**31**

3 Bronnen

De Bock, D., Verschaffel, L. en Janssens, D. (1999), De lineariteitsillusie bij leerlingen van het secundair onderwijs. Tijdschrift voor didactiek der ß-wetenschappen, 16(1), 73-90. Raadpleegbaar op http://www.cdbeta.uu.nl/tdb/fulltext/Tdbeta_16_1_Bock_1999.pdf

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. en Verschaffel, L. (2003). Waarom lineariteit de leerlingen soms parten speelt: een dieptestudie in het secundair onderwijs. *Wiskunde en Onderwijs, 29,* 208-223. Raadpleegbaar op www.fi.uu.nl/nwd/nwd2003/handouts/DeBock.doc

De Bock, D. en Van Dooren, W. (2006), De lineaire verleiding, "Hoeveel weegt een kabouter die 10 keer kleiner is dan jij?", *Klasse 161*, p. 8, Raadpleegbaar op http://pdf.klasse.be/KVL/KVL161/KVL161.pdf

Janssen, J., van der Schoot, F., & Hemker, B., (2005*). Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*. Arnhem: Cito.

Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap (2004). *Eerste peiling wiskunde en lezen in het basisonderwijs*. Brussel: Dienst voor Onderwijsontwikkeling.

Onderwijssecretariaat van de Steden en Gemeenten van de Vlaamse Gemeenschap OVSG (1998). *Leerplan Wiskunde voor de basisschool*. Brussel

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (B-stroom)*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (A-stroom)*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

van der Schoot, F. (2008) *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPON*. Arnhem: Cito.

Verschaffel, L. en Depaepe, F. (2010). *Bespreking peilingsresultaten wiskunde.* Leuven, Persoonlijke communicatie op 10 december 2010.

Website

Freudenthal-instituut in Nederland: http://www.fi.uu.nl/talbovenbouw/metenmeetkunde.html

4 Reflectie over de resultaten door een onderwijspartner. Meten in de basisschool, een probleem of een feest? Marleen Duerloo, begeleiding VSKO

In deze bijdrage wordt niet het hele proces van meten en metend rekenen in het basisonderwijs uit de doeken gedaan. Wel zoeken we naar een antwoord op twee belangrijke vragen in verband met het meten met standaardmaateenheden: "Hoe komt het dat betekenisvolle herleidingen zo slecht scoren?" En "Moeten we leerlingen meer kansen geven om praktische meetoefeningen te doen, waarbij ze zelf veel meten in zeer verschillende eenheden?"

Niet alleen uit de resultaten van de peilingen, maar ook de resultaten van de interdiocesane proeven (IDP) van het VVKBaO blijkt dat een deel van ons meetonderwijs nog kan geoptimaliseerd worden. Hoe pakken we dat aan?

Wat is meten?

"Meten is een manier om greep te krijgen op de werkelijkheid. We hebben het bijvoorbeeld over hoe groot iets is, of hoe zwaar. Of we vragen ons af hoe ver weg iets is, wat iets kost, hoe zoet iets is, hoe warm iets is, hoe lang iets duurt. Meten is een bepaalde wiskundige benadering van de werkelijkheid. Als we willen dat leerlingen op zo'n zelfde manier naar de werkelijkheid leren kijken, moeten we hen stimuleren om situaties in de werkelijkheid te structureren en te kwantificeren. Dat blijkt voor veel kinderen niet zo eenvoudig te zijn," schrijft het Tal-team[1] in de inleiding bij *Meten en meetkunde in de bovenbouw*. En verder: "Het is van belang dat leerlingen wiskundig gereedschap ontwikkelen om te kunnen meten en de meetresultaten te kunnen interpreteren. Dit betekent dat zij greep moeten krijgen op aan het meten gerelateerde concepten en procedures. Tot het wiskundig gereedschap dat we gebruiken hoort ook het metriek stelsel. Het metriek stelsel biedt een systematische opbouw in de maten van een bepaalde soort."

Wat betekent bovenstaande uitspraak voor het meetonderwijs?

Leerlingen moeten uitgebreid kennismaken met de opbouw van ons metriek stelsel. En bovendien moeten ze inzicht verwerven in het systeem zelf en de onderlinge samenhang van bepaalde maten. In vergelijking met historische maten is ons huidig metriek stelsel goed georganiseerd. Er wordt optimaal gebruik gemaakt van de structuur van het tientallig stelsel. Er worden zoveel mogelijk dezelfde voorvoegsels gebruikt om grotere en kleinere maten aan de eenheidsmaat te verbinden. En lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten zijn op een handige manier aan elkaar gekoppeld.

In welke mate scheppen we kansen om leerlingen dit systeem te leren (her)ontdekken? In welke mate maken we de voordelen van dit systeem duidelijk aan onze leerlingen?

Verder is leren meten ook het aanleren van een technische vaardigheid en tegelijkertijd het verwerven van een attitude. Het is van belang dat je nauwkeurig leert meten en dat je verschillende meetinstrumenten correct leert gebruiken. En vermits oefening kunst baart, houdt dit in dat leerlingen voldoende meetkansen dienen te krijgen. De ene leerling al meer dan de andere.

Meer en meer krijgen onze meetinstrumenten het karakter van een 'black box'. We meten met digitale weegschalen, digitale thermometers maar ook met digitale afstandsmeters. Het meetproces is onzichtbaar voor de gebruiker. Het blijft van belang dat leerlingen de relatie met afpassen kunnen leggen. Het basisidee van meten is immers het afpassen van een eenheidsmaat. Dit inzicht komt al in de kleuterklas aan bod bij allerlei meetervaringen met natuurlijke maateenheden.

Slagen we erin een degelijk meetonderwijs te organiseren?

In de brochure *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs* staat het volgende: "Betekenisvolle herleidingen zijn een belangrijk onderdeel van wiskunde. Meten is een vaardigheid in het dagelijks leven en in het beroepsleven van veel mensen. Daarbij hebben we herleidingen nodig om verbanden te kunnen leggen. Toch beheerst slechts 41 procent van de leerlingen deze eindtermen. Hoe komt dat? Is het inoefenen van vroeger volledig van de kaart verdwenen?

Uit de resultaten blijkt ook dat leerlingen die naar eigen zeggen in de lessen wiskunde zelf dingen opmeten in de klas of rond de school beter presteren voor de toetsen van het domein meten en meetkunde dan leerlingen die dit minder doen. Moeten we leerlingen meer kansen geven om praktische meetoefeningen te doen, waarbij ze zelf veel meten in zeer verschillende eenheden?"

Vooraleer in te gaan op de vraag of herleidingen nog wel voldoende ingeoefend worden, gaan we na hoe we ervoor kunnen zorgen dat leerlingen in de lagere school meer meetkansen krijgen.

Redenen die leerkrachten aanhalen om niet of weinig te meten zijn onder andere de volgende:

- er is te weinig meetmateriaal op school, ik moet het telkens zelf meebrengen;

[1] In 1997 heeft het Nederlandse ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap het TAL-team de opdracht gegeven tussendoelen voor het wiskundeonderwijs op de basisschool te beschrijven. Tussendoelen beogen een verdere uitwerking van en aanvulling te zijn op de al eerder vastgestelde (en daarna weer aangepaste)kerndoelen voor het vak wiskunde. Het TAL-team heeft leerlijnen toegevoegd. Leerlijnen beschrijven het proces naar de tussendoelen toe, alsmede de markeringspunten die hierbij te onderscheiden zijn.

- ik zie de meerwaarde van praktische oefeningen niet in, de leerlingen onthouden toch niet wat ze gedaan hebben;
- meten brengt veel rommel mee;
- ik vind het moeilijk om meetlessen alleen te organiseren;
- praktische meetoefeningen zijn alleen zinvol in de lagere leerjaren.

We vinden hier een aantal uitspraken die te maken hebben met een bepaalde visie over meetonderwijs, met beschikbare middelen en met competenties van leerkrachten om zinvolle meetopdrachten goed te kunnen organiseren. Het lijkt het makkelijkst om vanuit het ontwikkelen van middelen te vertrekken om daarna aan visie en competenties te werken.

Ervaring leert ons dat het aanleggen van meetkoffers of meetkisten een antwoord kan bieden. In scholen die hiermee aan de slag gaan, ontlok je dan volgende uitspraken:

- mijn leerlingen leren zelfstandig een meetprobleem oplossen;
- ik zie veel meer zelfactiviteit;
- spelenderwijze al doende leren in plaats van voordoen en voorkauwen;
- zowel mijn leerlingen als ikzelf beleven meer plezier aan meetlessen;
- ik merk vooral veel inzicht;
- mijn leerlingen zijn enthousiast als de meetfiches boven komen
- mijn leerlingen leren veel van elkaar, omdat ze elkaar goed kunnen uitleggen hoe je best meet;
- ook zwakke kinderen kunnen meedoen;
- ik heb ontdekt hoe kinderen denken;
- je kan veel observeren, welke fouten ze maken;
- ik heb soms onderschat hoe moeilijk meten is.

Je merkt hier dat leerkrachten ook hun visie over het nut van praktische meetoefeningen bijstellen.

Wat kan zo’n meetkist bevatten?

Stel meetkisten samen waarin je allerlei meetinstrumenten en voorwerpen verzamelt om te meten. Dit hoeft niet per klas verzameld te worden. Op een vaste plaats in de school kan iedereen ze snel vinden. Je hoeft ook niet meteen alles te hebben. De voorraad kan wel langzamerhand groeien. Hierbij denken we aan allerlei (liefst kosteloze) voorwerpen (o.a. gelijksoortige natuurlijke maateenheden) en verschillende meetinstrumenten. Breng aan de buitenkant een afbeelding aan op de meetkist, zodat iedereen meteen weet om welke meetkist het gaat.

Wat zou in de meetkist van ‘lengte’ kunnen zitten?

- Voorwerpen
  - Krijtjes om merktekens te plaatsen
  - Dingen om te meten hoef je niet te verzamelen: meet allerlei voorwerpen die aanwezig zijn in de klas, afstanden op de speelplaats, in de school…
  - Wel handig: enkele oude fietswielen met verschillende diameter, ronde deksels …
  - Bol wol of touw
  - Afstandstabellen met dubbele ingang (o.a. te vinden op landkaarten, wegenatlassen, …)
  - Gelijksoortige natuurlijke maateenheden:
  - linten, touwen, stokken, rietjes, tandenstokers, satéstokjes …
  - een voorraad papierrepen van verschillende kleur, lengte en breedte
- Meetinstrumenten
  - Stokmeter met centimeteraanduiding, meetlint of lintmeter, vouwmeter, rolmeter, meetlat, liniaal, …
  - Landmeterketting of een touw van 10 m lang, meetwiel
  - Eventueel een schuifmaat

Of de meetkist van inhoud?

- (Lege) voorwerpen
  - *Flessen: papfles, parfum, wijn, bier, cola, limonade, melk, azijn, water, shampoo, …*
  - *Glazen: limonade, water, wijn, bier, likeur, …*
  - *Bekertjes: melk, fruitsap, …*
  - *Blikjes: frisdrank, conserven,…*
  - *Bokalen: confituur, appelmoes, saus, …*

- *Soepbord, koffiekan, koffiekop, kookpot, eetlepel, pollepel, maatbeker, (meng)kom, kleine en grote emmer, vaas, gieter, …*
    - *Dozen: ijsroom, yoghurtpotje …*
    - *Druppeltellers, spuitjes, zoutvaatje, vingerhoed*
    - *Stiften of kleefband om merktekens aan te brengen*
    - *Trechters (hiervoor kan je de bovenkant van een plastieken fles afsnijden) of een blad papier vouwen*
    - *Doorschijnende ruimtefiguren die je kan vullen (eventueel met maataanduidingen)*
    - *Doos babyvoeding (met 'melkpoeder') met maatschepje: papfles klaarmaken*
    - *Reclamefolders waarin inhoudsmaten vermeld staan*
    - *Vulmaterialen: (gekleurd) zout, (schelpen)zand, kleine schelpjes, isomokorrels, steentjes, …*
- Tips
    - Als je opziet tegen geknoei met water kan je ook (gekleurd) zout gebruiken. Zout kan je erg makkelijk kleuren met behulp van een viltstift op waterbasis. Neem een plastieken kaftje (aan drie kanten gesloten), kleur een deel van de binnenkant met de viltstift. Strooi zout in kaftje. Schudden en klaar is kees!
    - Om morsen met water tegen te gaan gebruik je een kuipje met water en plaats je daarop een plankje waarop je de flessen (of andere voorwerpen) kan zetten.
- Meetinstrumenten
    - Maatbekers: één liter, ½ liter, 1 dl, 1 cl
    - Beker met maatverdeling in ml
    - Kubieke dm set

Ongetwijfeld vinden enthousiaste leerkrachten en leerlingen nog meer nuttige zaken die in zo'n kist een plaatsje verdienen.

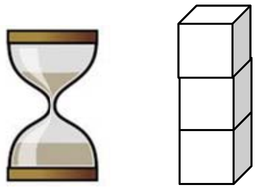
Meetopdrachten maken de meetkisten helemaal compleet. Die meetopdrachten kunnen leerkrachten uit hun wiskundemethode halen of ze zelf samen met collega's opstellen. Het voordeel dat de meetopdrachten van de verschillende leerjaren in de meetkist zitten, is dat je op die manier gemakkelijk kan differentiëren. Leerlingen die nog onvoldoende vertrouwd zijn met bepaalde maten kunnen een meetoefening uit een voorgaand leerjaar hernemen. De meetopdrachten worden niet alleen tijdens de meetles uitgevoerd, maar kunnen ook in hoeken- en contractwerk aangeboden worden.

Hierbij een voorbeeld van een meetopdracht over tijdsduur ervaren voor het tweede leerjaar ontwikkeld door Scholengemeenschap Spoor 7.

Tijdsduur ervaren

1 <u>Draai de grote zandloper om.</u>

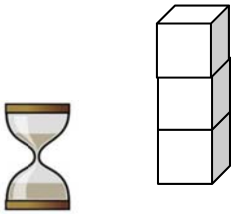
<u>Hoeveel blokjes kan je stapelen in de tijd dat de zandloper loopt ?</u>



Ik kan …………………. blokjes stapelen totdat de grote zandloper leeggelopen is.

2 Draai de kleine zandloper om.

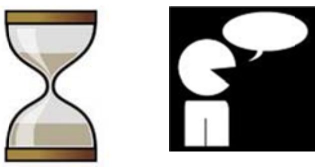
Hoeveel blokjes kan je stapelen in de tijd dat de zandloper loopt?



Ik kan …………………. blokjes stapelen totdat de kleine zandloper leeggelopen is.

3 Draai de grote zandloper om.

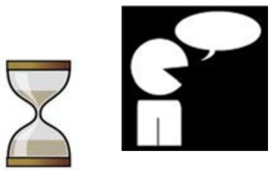
Hoeveel keer kan je vingerrijmpje ‘pinte pente‘ opzeggen?



Ik kan het rijmpje ……………. keer opzeggen.

4 Draai de kleine zandloper om.

Hoeveel keer kan je het rijmpje ‘pinte pente‘ nu opzeggen?



Ik kan het rijmpje ……………. keer opzeggen.

Goed, de middelen zijn er. Nu nog de aanpak.

Nogal wat scholen kiezen om ervoor te zorgen dat tijdens de meetlessen twee leerkrachten in de klas zijn, andere laten leerlingen per twee samenwerken tijdens hoekenwerk of werken regelmatig met een meetcircuit, bij een graadklas worden er gemengde groepen gemaakt waarbij de tweedeklassers de eersteklassers ondersteunen. Deze aanpak laat toe dat àlle leerlingen de voorziene meetoefeningen kunnen uitvoeren. En dat leerkrachten ook met een beter gevoel aan de meetles beginnen.

Leerkrachten die meetkoffers en -fiches gebruiken, geven aan dat ze meer dan voordien tijd krijgen om te observeren. Van belang is dat je bij de opdrachten leerlingen zelf laat ontdekken, dat je niet sturend optreedt maar wel de juiste denkvragen leert stellen.

Bij elke meetles hoort een klassikale nabespreking. Zo krijg je de gelegenheid om de meetervaringen te duiden en vast te leggen. Je bespreekt bijvoorbeeld wat de oorzaak kan zijn van bepaalde meetfouten, welke stappen je zet om de meting tot een goed einde te brengen, wat je dient te onthouden van deze meetoefening en zo meer.

Bij bovenstaande meetfiche over tijdsduur ervaren kan het leergesprek gaan over de verschillende meetresultaten. Maar misschien is het ook zo dat de kleine zandloper meer tijd nodig heeft om door te lopen dan de grote. Hoe komt dat? Hoe kan je ervoor zorgen dat je meer blokken binnen dezelfde tijd kan stapelen? Hoe heb je het aangepakt om te tellen hoe vaak je het versje kan opzeggen? Het besef dat er een verschil is tussen een subjectieve ervaring en een objectieve meting van tijdsduur kan aan bod komen. Wat duurde voor jou het langst? Volgende keer maken we eerst een schatting hoeveel blokken we kunnen stapelen, hoeveel keer we het gedichtje kunnen opzeggen. Waarom hebben we deze oefening gemaakt? Een erg belangrijke vraag. Want kunnen inschatten wat je in een bepaalde tijdsduur wel of niet kan doen, is erg handig in je dagelijks leven.

En wat met referentiematen?

Een belangrijk doel van al die meetoefeningen is dat leerlingen zich bij elke maat een referentiemaat kunnen voorstellen en dat ze de onderlinge verhoudingen tussen de maten goed leren kennen. Door die verbinding met referentiematen wordt het gevoel voor de orde van grootte van de standaardmaateenheid nog versterkt.

Het maakt niet uit welke referentie je kiest. Ze moet wel dagelijks ‘zichtbaar’ zijn én gedurende heel de lagere school dezelfde blijven. Erg handig is dat je een meetboekje aanlegt waarin alle afgesproken referentiematen zijn vastgelegd. In hetzelfde boekje noteer je de meetresultaten van een aantal metingen die de leerlingen jaarlijks uitvoeren. Bijvoorbeeld: je eigen lengte. In de derde graad kan je dan van die eigen meetresultaten gemiddelden berekenen. Bijvoorbeeld: hoeveel cm per jaar ben ik gemiddeld gegroeid?

Verder is het van belang dat je kinderen regelmatig met referentiematen leert omgaan: bij schatoefeningen in de meetles, tijdens leerwandelingen en in andere lessen dan de wiskundeles. Zo bouwen leerlingen langzamerhand een uitgebreid repertoire van referentiematen op. Welk materiaal heb je om in je klas 1 m^3 voor te stellen? Laat je in of naast die m^3 een tijdje één of meerdere dm^3 staan? Misschien kan je er een foto van maken, zodat leerlingen ook na de les de verhouding tussen dm^3 en m^3 blijven onthouden.

Referentiematen zijn onontbeerlijk om te leren schatten. Hoewel schatten moeilijk is, neem je het toch best mee vanaf het begin. Het uitgangspunt is: We leren schatten, dan mag je fouten maken. Een schatting dient vooral om de grootteorde te bepalen, niet om meteen zo dicht mogelijk bij de nauwkeurige uitkomst - in dit geval het meetresultaat - te komen. Heel ervaren volwassen schatters komen uiteraard wel heel dicht bij het meetresultaat terecht.

Bekijken we nu de tweede vraag: “Is het inoefenen van herleidingen volledig van de kaart verdwenen?”

Wat lezen we over betekenisvolle herleidingen in de brochure *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs?* “Betekenisvolle herleidingen (in 2002: 56 procent – in 2009: 41 procent) Minder dan de helft van de leerlingen bereikt dus de eindtermen over ‘betekenisvolle herleidingen. Drie kwart van de leerlingen kan vlot eenvoudige omzettingen in een zeer vertrouwde context maken met kleine getallen. Dit geldt opvallend voor herleidingen met tijd en geld. Meer leerlingen krijgen problemen als ze omzettingen moeten maken die verder gaan dan één grootteorde. Opgaven over oppervlakte en inhoud, en over gecombineerde inhoudsmaten (kubieke decimeter en liter) zijn voor een derde van de leerlingen een probleem. Deze resultaten zijn opvallend minder goed dan in 2002, hoewel dit ook toen een toets was waar ongeveer de helft van de leerlingen moeite mee had."

Waarom leren we kinderen herleidingen maken?

Het greep krijgen op verbanden tussen maten vormt een interessant onderzoeksgebied voor kinderen. Ze beredeneren hoe het afpassen met een bepaalde maat in z'n werk gaat. Het aantal keren dat je iets afpast, levert een maatgetal. Daarbij bepaalt de grootte van de maat de nauwkeurigheid. Welke maat we kiezen, hangt af van de situatie. En als het werkelijk heel nauwkeurig moet, dan zullen we zelfs nadrukkelijk rekening houden met onnauwkeurigheden. Deze onnauwkeurigheden zitten ingebakken in het meten. We kunnen een meting nauwkeuriger maken door deze herhaald uit te voeren en de meetresultaten vervolgens te middelen, stelt het Tal-team. Of met andere woorden we beseffen dat elke meting een benadering is. Meteen een oproep om leerlingen eenzelfde meting herhaalde keren te laten uitvoeren. En daarover weer te reflecteren.

Wat lezen we in de *Toelichtingen bij het leerplan meten en metend rekenen van VVKBaO*?

Het leerplan beperkt het aantal herleidingen. De oefeningen staan niet los van de ervaringen die leerlingen met de gekende maten hebben opgedaan.

Het leerplan voorziet een beperking van kommagetallen tot drie decimalen. Dit brengt mee dat een aantal herleidingen niet meer kunnen voorkomen. De herleidingen die nog kunnen voorkomen zijn aangegeven met een pijl.

↔ betekent: in beide richtingen kunnen herleiden,

→ betekent: enkel herleiden in de aangegeven richting

Voor lengte, inhoud, oppervlakte en gewicht worden in de verschillende leerjaren de herleidingoefeningen beperkt tot:

Tweede leerjaar	bij a) tussen de hoofdeenheid en de afgeleide eenheden m ↔ dm m ↔ cm l ↔ dl l ↔ cl bij b) tussen frequent gebruikte maateenheden dm ↔ cm dl ↔ cl
Derde leerjaar	bij a) m ↔ dm m ↔ cm m ↔ km l ↔ dl l ↔ cl kg ↔ g uur → min. bij b) dm ↔ cm dl ↔ cl kwartier → min.
Vierde leerjaar	bij a) m ↔ dm m ↔ cm m ↔ km m ↔ mm m^2 ↔ dm^2 m^2 → cm^2 l ↔ dl l ↔ cl l ↔ ml kg ↔ g kg ↔ ton

	uur $\rightarrow$ min. bij b) dm $\leftrightarrow$ cm dm $\leftrightarrow$ mm cm $\leftrightarrow$ mm $dm^2 \leftrightarrow cm^2$ dl $\leftrightarrow$ cl dl $\leftrightarrow$ ml cl $\leftrightarrow$ ml min. $\rightarrow$ sec.
Vijfde leerjaar	bij a) m $\leftrightarrow$ dm m $\leftrightarrow$ cm m $\leftrightarrow$ km m $\leftrightarrow$ mm $m^2 \leftrightarrow dm^2$ $m^2 \rightarrow cm^2$ $m^2 \rightarrow km^2$ a $\rightarrow$ ca a $\leftarrow$ ha (nooit in decimale vorm) l $\leftrightarrow$ dl l $\leftrightarrow$ cl l $\leftrightarrow$ ml kg $\leftrightarrow$ g kg $\leftrightarrow$ ton uur $\rightarrow$ min. bij b) dm $\leftrightarrow$ cm dm $\leftrightarrow$ mm cm $\leftrightarrow$ mm $dm^2 \leftrightarrow cm^2$ dl $\leftrightarrow$ cl dl $\leftrightarrow$ ml cl $\leftrightarrow$ ml min. $\rightarrow$ sec.
Zesde leerjaar	bij a) m $\leftrightarrow$ dm m $\leftrightarrow$ cm m $\leftrightarrow$ km m $\leftrightarrow$ mm $m^2 \leftrightarrow dm^2$ $m^2 \rightarrow cm^2$ $m^2 \rightarrow km^2$ a $\rightarrow$ ca a $\leftarrow$ ha (nooit in decimale vorm) l $\leftrightarrow$ dl l $\leftrightarrow$ cl l $\leftrightarrow$ ml $m^3 \leftrightarrow dm^3$ $m^3 \rightarrow cm^3$ (cc) kg $\leftrightarrow$ g kg $\leftrightarrow$ ton uur $\rightarrow$ min. bij b) dm $\leftrightarrow$ cm dm $\leftrightarrow$ mm cm $\leftrightarrow$ mm $dm^2 \leftrightarrow cm^2$ dl $\leftrightarrow$ cl dl $\leftrightarrow$ ml cl $\leftrightarrow$ ml $dm^3 \leftrightarrow cm^3$ min. $\rightarrow$ sec.

Het antwoord op de vraag:“Is het inoefenen van herleidingen volledig van de kaart verdwenen?” luidt dat er zeker minder herleidingen worden ingeoefend dan vroeger. En die vroeger gaat dan terug naar de periode voor de invoering van de eindtermen (1997) en het leerplan wiskunde (1998). Waarbij we eerlijk toegeven dat toen de meeste rijtjes oefeningen voor heel wat leerlingen betekenisloos waren. En dat herleidingen uitvoeren voor een aantal leerlingen neerkwam op het toepassen van een trucje: zoveel nullen erbij of zoveel nullen eraf zonder zich daar iets concreets bij te kunnen voorstellen.

Misschien is nu bij een aantal leerkrachten het idee ontstaan dat herleidingstabellen leren gebruiken, niet meer hoeft of zelfs niet meer mag. Ook al omdat een aantal maten uit ons metriek stelsel niet meer als dusdanig aangebracht worden omdat we ze niet langer dagelijks gebruiken. Denk hierbij bijvoorbeeld aan hectometer en decameter.

Herleidingtabellen blijven een zinvolle hulp voor leerlingen. Als we enkel wensen te kijken naar het product, dan interesseert het ons minder hoe leerlingen aan hun antwoord komen. Wensen we eveneens te investeren in het proces, dan moeten we leerlingen zelf tabellen leren opstellen en gebruiken. En hen ook leren wanneer ze wel of niet van een tabel gebruik maken.

Voorbeelden van herleidingstabellen voor lengtematen:

km			**m**	**dm**	**cm**	**mm**

km	100 m	10 m	**m**	**dm**	**cm**	**mm**

km	100 m (hm)	10 m (dam)	**m**	**dm**	**cm**	**mm**

Gebruik echter nooit:

km	m	dm	cm	mm

Leer je leerlingen zelf herleidingstabellen opstellen en gebruiken. Werk daar systematisch aan. Geef om te beginnen een volledig ingevulde tabel.

Een voorbeeld voor oppervlaktematen en landmaten:

x 100 x 100 x 100 x 100 x 100

oppervlaktematen	km^2	10 000 m^2	100 m^2	m^2	dm^2	cm^2
landmaten		hectare ha	are a	centiare ca		

: 100 : 100 : 100 : 100 : 100

Laat dan enkele maten weg en leer de tabel verder invullen.

oppervlaktematen	km^2			m^2		
landmaten				ca		

Een derde stap kan zijn om een voorgestructureerde lege tabel aan te bieden. Om tot slot zelf de tabel volledig te kunnen uittekenen.

Gebruik zelf ook een herleidingstabel wanneer je herleidingen uitvoert aan het bord. Toon daarbij hoe je die opbouwt. Denk hardop.

Zorg ervoor dat maten zichtbaar zijn en blijven in de klas. Zo kunnen leerlingen zich bijvoorbeeld voorstellen dat in de kubus van 1 dm^3 1 liter water gaat. Vanuit dat gegeven kunnen ze de herleidingstabel verder opbouwen.

Altijd zinvol volgens de studie van Marzano is het zoeken naar overeenkomsten en verschillen. In dit geval waarin verschilt bijvoorbeeld het metriek stelsel van lengtematen met dat van tijd? Of met dat van oppervlaktematen? Wat zijn de overeenkomsten tussen oppervlakte- en landmaten?

De herleidingen moet betekenisvol zijn

Het betekent dat het centraal stellen van problemen nog meer nadruk krijgt. Het ministerie van Onderwijs van Singapore[2] stelt dat het oplossen van wiskundige problemen centraal staat bij het leren van rekenen/wiskunde. Dit vraagt van leerlingen dat ze zich meester maken van rekenkundige concepten en vaardigheden en dat ze deze kunnen toepassen binnen een verscheidenheid aan situaties. Het oplossen van problemen staat centraal met daar omheen vijf essentiële elementen die onderling verbonden zijn: concepten, vaardigheden, processen, attitudes en metacognitie. Eenzelfde idee kregen we ook al van het Tal-team in de inleiding van dit artikel.

Bij herleidingen kan dit betekenen dat je – hoe bescheiden ook – aangeeft in welke context je die herleiding kan herkennen of wanneer ze van pas kan komen al is het maar om beter thuis te raken in ons metriek stelsel.

Twee voorbeelden uit de interdiocesane proeven.

Opgave	Op de telefoonrekening van Jasmine staat dat ze in de maand mei voor 223 minuten gebeld heeft.
Antwoord	Jasmine belde in mei …………. uur en ……….. minuten.

85% goede antwoorden

[2] Leerlingen in Singapore eindigden op de eerste plaats in TIMSS in 1995, 1999 en 2003 en in de top drie in 2007.

Opgave	Het bovenblad van een tafel is 3/4 van een m^2. Dat is:				
Antwoord	**A** 75 mm^2	**B** 7,5 cm^2	**C** 75 cm^2	**D** 7,5 dm^2	**E** 75 dm^2

63% goede antwoorden

Een bedenking bij de vragen van de peilingstoets

Eindterm 2.7 zegt: “Leerlingen kunnen met de gebruikelijke maateenheden betekenisvolle herleidingen uitvoeren.”

Hield men bij de selectie van de vragen voldoende rekening met ‘gebruikelijke’ en ‘betekenisvolle’? Niet alle vragen beantwoorden aan beide criteria, maar dat alleen volstaat niet om de slechte score te verklaren. Het zou interessant zijn om na te gaan hoe leerlingen antwoorden wanneer ze bij een vraag een al dan niet volledig ingevulde herleidingstabel vinden.

Besluit

Hopelijk draagt deze bijdrage een steentje bij om van meten, meetactiviteiten en meetlessen een feest te maken. Zodat zowel leerlingen als leerkrachten uitkijken naar alles wat met meten te maken heeft.

Sluiten we af met een citaat van het Tal-team. “In het meetonderwijs vindt een voortdurende pendel plaats tussen het greep krijgen op de werkelijkheid en het ontwikkelen van wiskundig gereedschap voor het meten. Het nader onderzoeken van allerlei herkenbare situaties leidt tot verdere greep op deze situaties, maar ook tot het ontwikkelen en aanscherpen van wiskundige gereedschappen. Deze nieuwe gereedschappen kunnen kinderen vervolgens inzetten bij het aanpakken van nieuwe problemen.”

Bronnen

Marzano, R. *Wat werkt op school? Research in actie*, Bazalt, Middelburg, 2007.

Tal-team, *Meten en meetkunde in de bovenbouw*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 2007.

Maarschalkerweerd, J. & Kole, L. *Rekenen-wiskunde in Singapore. Het oplossen van een probleem centraal*, Volgens Bartjens jaargang 30 2010/2011 nr. 3.

VVKBaO, *Leerplan wiskunde*, Brussel, 1998.

VVKBaO, *Toelichtingen bij het leerplan meten en metend rekenen*, Brussel, 2002.

VVKBaO, *Toelichtingen en suggesties voor preventie en remediëring bij IDP wiskunde* op www.vvkbao.be.

IV - Rekenen

"We willen bereiken dat kinderen situaties uit hun eigen leefwereld in een wiskundige taal kunnen beschrijven. Dat kunnen feiten, begrippen, structuren, regels en wetmatigheden zijn. (GO!,1998 p. 3)"

Elke volwassene wordt geregeld geconfronteerd met rekenen. Het gaat dan over vaardigheden die in het basisonderwijs worden aangeleerd. Rekenen is vaak belangrijk in het dagelijks leven en op het werk. Ook algebraïsch rekenen is voor een groep mensen belangrijk, bijvoorbeeld voor wetenschappers. Soms is het gemakkelijk om het nut van rekenen direct aan leerlingen duidelijk te maken, bij algebraïsch rekenen is dat niet altijd mogelijk: het nut ervan kan pas later geïllustreerd worden.

Rekenkunde en algebraïsch rekenen zijn allebei belangrijk: beide komen in dit hoofdstuk aan bod. Verdere abstractie wordt in hoofdstuk vijf besproken, de scheidingslijn tussen de twee hoofdstukken is wat kunstmatig. Omdat abstrahering niet enkel bij rekenen belangrijk is, werden beide hoofdstukken apart behouden.

Inhoudstafel

1 Peilingsresultaten

De peilingsresultaten in dit domein zijn goed voor de concrete aspecten van rekenen, zeker in het basisonderwijs. Andere resultaten vallen tegen, zeker in de eerste graad van het secundair onderwijs. Rekenen begint in het basisonderwijs erg concreet, geleidelijk moeten leerlingen leren om ook minder concrete leerinhouden te verwerken.

Hierna (Figuur 4.1) staan de resultaten op peilingstoetsen waarin eindtermen en ontwikkelingsdoelen over rekenen, ook algebraïsch rekenen, aan bod kwamen. Bijlage 1 bevat een volledig overzicht van de eindtermen en ontwikkelingsdoelen in de drie wiskundepeilingen.

1.1 Basisonderwijs

In het basisonderwijs zijn de resultaten op veel van deze toetsen goed tot zeer goed. De resultaten op de toetsen die ook in 2002 werden afgenomen worden bevestigd of verbeterd. Er is een driedeling in de toetsen over dit onderwerp. Een deel van de leerlingen beheerst duidelijk niet alle technische vaardigheden: de resultaten voor ‘hoofdrekenen’ en ‘snelrekenen’ zijn minder goed dan voor ‘cijferen’.

De meeste leerlingen beheersen de begripsvorming, het inzicht en de toepassing van inzichten over getallen en bewerkingen. Deze worden in hoofdzaak gemeten in de toetsen over ‘getalwaarden en gelijkwaadigheid’, ‘verhoudingen’ en ‘begrippen met betrekking tot bewerkingen’.

Bij de groep toetsen waar ze moeten verder bouwen op deze vaardigheden en inzichten haken meer leerlingen af, het gaat om de toetsen over ‘breuken en kommagetallen’, ‘veelvouden en delers’, ‘functies en voorstellingswijzen’ en ‘procentberekeningen in praktische situaties’. Een grote helft van de leerlingen beheerst in het basisonderwijs die leerinhouden.

1.2 Eerste graad van het secundair onderwijs, B-stroom

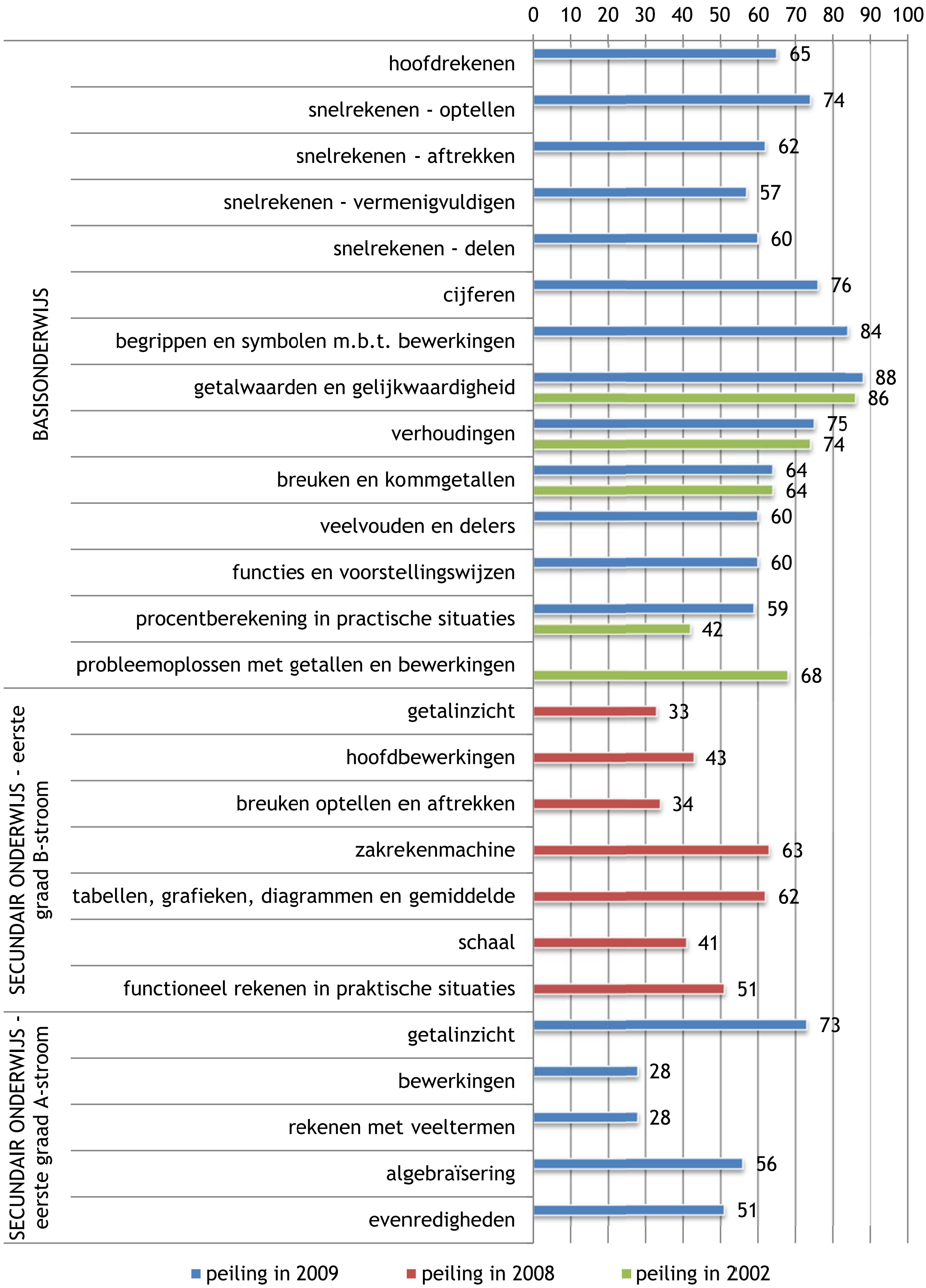
In de B-stroom hebben leerlingen duidelijk baat bij een rekenmachine als zij moeten rekenen: hun inzicht in getallen en bewerkingen is niet zo groot, maar met een rekenmachine brengen meer leerlingen het er goed van af.

De toetsen over ‘getalinzicht en hoofdbewerkingen’ zijn niet goed afgelegd in de B-stroom. Een derde van de leerlingen behaalt de ontwikkelingsdoelen over ‘getalinzicht’ (33%) en over ‘breuken optellen en aftrekken’ (34%). Het ontwikkelingsdoel uit de toets over ‘getalinzicht’ vraagt dat de leerlingen inzicht hebben in de relatie tussen breuk, kommagetal en procent. Als dit inzicht bij zoveel leerlingen ontbreekt, is het misschien niet verwonderlijk dat veel leerlingen ook niet met de breuken kunnen rekenen. Iets meer leerlingen behaalt de eindtermen over ‘hoofdbewerkingen’ (43%). Meer dan de helft van de leerlingen beheerst de ontwikkelingsdoelen niet.

Veel leerlingen in de B-stroom kunnen overweg met wiskundige informatie, de helft van deze groep slaagt erin om ook in praktische situaties te rekenen. Dit is alvast een belangrijke verworvenheid voor deze leerlingen.

1.3 Eerste graad van het secundair onderwijs, A-stroom

In de A-stroom heeft drie kwart van de leerlingen voldoende inzicht in getallen, maar stemmen de resultaten voor inzichtelijk gebruik van deze getallen en hun voorstellingswijzen toch tot nadenken. Mogelijk bouwen de leerinhouden hier verder op de eindtermen van het basisonderwijs, die echter bij een deel van de leerlingen nog niet verworven zijn. Een bijkomende groep haakt af.



Figuur 4.1: Peilingsresultaten voor Vlaamse eindtermen eindtermen over rekenen

In de A-stroom is de score voor 'bewerkingen' niet goed: 28% van de leerlingen behaalt de eindtermen van deze toets. Eenvoudige rekenvraagstukken met een betekenisvolle context worden in het algemeen beter opgelost dan kale rekenopgaven. Opgaven zonder breuken worden doorgaans beter opgelost dan opgaven met breuken. Getallen optellen en aftrekken lukt bij de meesten, maar weinig jongeren kunnen correct vermenigvuldigen en delen met gehele of rationale getallen. De leerlingen beheersen ook onvoldoende de toepassing van de volgorde van bewerkingen. Procentberekeningen in zinvolle contexten (bijvoorbeeld kortingen berekenen) lukt bij een aantal leerlingen nog niet.

De eindtermen over het rekenen met veeltermen worden door amper 28% van de leerlingen behaald. Ongeveer de helft van de leerlingen kan twee tweetermen of drietermen optellen of aftrekken, maar krijgt problemen als dat er meer dan twee zijn of als het combinaties zijn. De formules voor merkwaardige producten zijn onvoldoende gekend en worden niet goed toegepast. Het oplossen van vergelijkingen van de vorm x+a=b en ax=b lukt goed als a en b gehele getallen zijn, maar loopt moeizamer als in de opgave rationale getallen voorkomen. Leerlingen hebben ook meer moeite met het oplossen van vergelijkingen van de vorm ax+b=c en als de onbekende in het rechterlid staat. Het werken met veeltermen verloopt moeizaam. Leerlingen hebben onvoldoende inzicht in de structuur en betekenis van de formules en de formele regels die er bij horen.

De helft van de leerlingen in de A-stroom beheerst de eindtermen over evenredigheden. Veel leerlingen kunnen een vierde verhoudingsgetal vinden als de drie andere gegeven zijn, maar daarmee bereiken ze niet de essentie van de eindtermen in de eerste graad. Leerlingen moeten ook het verband herkennen in een tabel met twee recht evenredige grootheden, dat lukt bij minder dan de helft van de leerlingen.

2 Reflecties over de resultaten door AKOV

2.1 Rekenkunde: bevestigen andere bronnen de peilingsresultaten?

2.1.1 TIMSS - algemeen

In het vorige hoofdstuk werden toetsen en resultaten van de Vlaamse wiskundepeiling in het basisonderwijs over ‘meten en meetkunde’ vergeleken met die uit de Nederlandse wiskundepeiling PPON op het einde van het primair onderwijs. De inhouden en de resultaten van de toetsen over ‘rekenen’ worden hier in een bredere internationale context geplaatst. Vlaanderen en Nederland bereiken beide gemiddeld goede wiskunderesultaten in TIMSS.

‘Trends in International Mathematics and Science Study’ (TIMSS) is een internationaal vergelijkende studie over wiskunde en wetenschappen in opdracht van IEA (International Association of International Achievement). In 2003 gebeurde het onderzoek in 50 landen, verspreid over de wereld. De toetsen worden om de vier jaar afgenomen bij leerlingen uit ‘leerjaar 4’ en ‘leerjaar 8’. In Vlaanderen zijn dit het vierde leerjaar van het basisonderwijs en het tweede jaar van het secundair onderwijs. Het lager onderwijs nam voor de eerste keer deel in 2003. Leerlingen van het tweede leerjaar secundair onderwijs werden getest in 1995, 1999 en 2003. In 2007 nam Vlaanderen niet deel aan TIMSS. In 2011 zal Vlaanderen deelnemen met de leerlingen van het vierde leerjaar van het lager onderwijs, de resultaten daarvan worden verwacht in december 2012. De leerlingen van het secundair onderwijs nemen in 2011 niet deel aan TIMSS.

TIMSS vergelijkt voor een gekozen domein de leerresultaten van een groep leerlingen in verschillende landen, en wil zo internationale samenwerking en overleg over leerprestaties in wiskunde en wetenschappen bevorderen. Het onderzoek voorziet de onderwijsministers van referentiecriteria en van regelmatige feedback over leerlingenprestaties in hun land. De doelstelling is een internationale vergelijking op basis van voornamelijk kwantitatieve gegevens. De resultaten van deze studie worden best steeds voorzichtig gebruikt: zij beschrijven, maar verklaren niet. Er wordt in het onderzoek achtergrondinformatie verzameld in vragenlijsten om de prestatieverschillen tussen leerlingen, scholen en onderwijssystemen te interpreteren, maar het is niet gemakkelijk om te verklaren waarom een land op een bepaalde plaats staat.

De verschillende cognitieve aspecten worden bij TIMSS samengevat in vier overkoepelende domeinen:

- kennis van feiten en procedures;
- toepassen van concepten;

- oplossen van routineproblemen;
- redeneren.

Voor alle cognitieve domeinen voorzien de onderzoekers opgaven met uiteenlopende moeilijkheidsgraad.

Voor de ontwikkeling van de opgaven wordt eerst een conceptueel kader gemaakt. Voor TIMSS worden de verschillende nationale curricula vergeleken en wordt gewerkt met de grootste gemene deler van de inhoud van de verschillende curricula. De resultaten worden globaal en per inhoudsdomein gerapporteerd. De inhoudsdomeinen voor wiskunde en hun verdere onderverdeling van het onderzoek in 2003 staan in Tabel 4.1. De grijze inhoudsdomeinen worden verder in dit hoofdstuk besproken.

Tabel 4.1 Inhoudsdomeinen en onderdelen bij TIMSS 2003

deeldomein	4de leerjaar basisonderwijs	2de leerjaar secundair onderwijs
getallen	natuurlijke getallen breuken en decimalen eenvoudig evenredig redeneren	natuurlijke getallen breuken en decimalen gehele getallen proporties, verhoudingen en procenten
patronen en relaties	patronen vergelijkingen en formules relaties	
algebra		patronen algebraïsche uitdrukkingen vergelijkingen en formules relaties
metingen	kenmerken en eenheden hulpmiddelen, technieken en formules	kenmerken en eenheden hulpmiddelen, technieken en formules
meetkunde	lijnen en hoeken twee- en driedimenstionele vormen congruentie en gelijkvormigheid plaatsbepalingen en ruimtelijke relaties symmetrie en transformaties	lijnen en hoeken twee- en driedimenstionele vormen congruentie en gelijkvormigheid plaatsbepalingen en ruimtelijke relaties symmetrie en transformaties
data	verzameling en –organisatie van gegevens voorstelling van gegevens interpretatie van gegevens	verzameling en –organisatie van gegevens voorstelling van gegevens interpretatie van gegevens onzekerheid en waarschijnlijkheid

De volledige Vlaamse en internationale rapporten over TIMSS zijn beschikbaar op het internet, de volledige verwijzing staat bij de bronnen.

TIMSS rapporteert resultaten op basis van een meetschaal. Om te weten wat een schaalpunt betekent - bijvoorbeeld wat een score van 536 op een meetschaal betekent - gebruikt TIMSS een procedure van schaalverankering. Bij deze procedure worden schaalpunten (benchmarks) vastgelegd die leerlingenprestaties beschrijven op basis van een inhoudelijke interpretatie van opgaven die leerlingen op deze ankerpunten beheersen. Deze procedure wordt enkel toegepast voor de algemene schaal en niet voor de inhoudspecifieke schalen. Deze werkwijze levert een omschrijving op van de kennis en vaardigheden die een leerling op een bepaald punt beheerst. De algemene schaal bevat de vijf deeldomeinen die in TIMSS-wiskunde aan bod kwamen.

In TIMSS leggen de onderzoekers meerdere standaarden:

- de gevorderde internationale standaard ligt op 625 scorepunten;
- de hoge internationale standaard ligt op 550 scorepunten;
- de tussenliggende internationale standaard ligt op 475 scorepunten;
- de lage internationale standaard ligt op 400 scorepunten.

In tabellen 4.2 en 4.4 zijn de TIMSS-standaarden beschreven voor het vierde leerjaar van de basisschool en voor het tweede jaar van het secundair onderwijs. Onder elke beschrijving staat het percentage leerlingen dat in Vlaanderen deze standaard in 2003 bereikte in de Tabellen 4.3 en 4.5. Deze informatie is overgenomen uit de internationale brochure (niet beschikbaar in het Nederlands).

2.1.1.1.1 BASISONDERWIJS, vierde leerjaar

Tabel 4.2 Beschrijving van elke standaard voor het vierde leerjaar basisonderwijs

Advanced International Benchmark – 625

Students can apply their understanding and knowledge in a wide variety of relatively complex situations. They demonstrate a developing understanding of fractions and decimals and the relationship between them. They can select appropriate information to solve multi-step word problems involving proportions. They can formulate or select a rule for a relationship. They show understanding of area and can use measurement concepts to solve a variety of problems. They show some understanding of rotation. They can organize, interpret, and represent data to solve problems.

High International Benchmark – 550

Student can apply their knowledge and understanding to solve problems. Student can solve multi-step word problems involving addition, multiplication, and division. They can use their understanding of place value and simple fractions to solve problems. They can identify a number sentence that represents situations. Students show understanding of three-dimensional objects, how shapes can make other shapes, and simple transformation in a plane. They demonstrate a variety of measurement skills and can interpret and use data in tables and graphs to solve problems.

Intermediate International Benchmark – 475

Students can apply basic mathematical knowledge in straightforward situations. They can read, interpret, and use different representations of numbers. They can perform operations with three- and four-digit numbers and decimals. They can extend simple patterns. They are familiar with a range of two-dimensional shapes and read and interpret different representations of the same data.

Low International Benchmark – 400

Students have some basic mathematical knowledge. Students demonstrate an understanding of whole numbers and can do simple computations with them. They demonstrate familiarity with the basic properties of triangles and rectangles. They can read information from simple bar graphs.

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

Tabel 4.3 Vlaamse wiskundeprestaties in TIMSS 2003 in het vierde leerjaar basisonderwijs

	Vlaanderen	Internationaal gemiddelde
minstens 625 punten (gevorderde standaard)	10%	8%
minstens 550 punten (hoge standaard)	51%	33%
minstens 475 punten (tussenliggende standaard)	90%	64%
minstens 400 punten (lage standaard)	99%	84%

2.1.1.1.2 SECUNDAIR ONDERWIJS, tweede jaar

Tabel 4.4 Beschrijving van elke standaard voor het tweede jaar secundair onderwijs

Advanced International Benchmark – 625

Students can organize information, make generalizations, solve non-routine problems, and draw and justify conclusions from data. They can compute percent change and apply their knowledge of numeric and algebraic concepts and relationships to solve problems. Students can solve simultaneous linear equations and model simple situations algebraically. They can apply their knowledge of measurement and geometry in complex problem situations. They can interpret data from a variety of tables and graphs, including interpolation and extrapolation.

High International Benchmark – 550

Students can apply their understanding and knowledge in a wide variety of relatively complex situations. They can order, relate, and compute with fractions and decimals to solve word problems, operate with negative integers, and solve multi-step word problems involving proportions with whole numbers. Students can solve simple algebraic problems including evaluating expressions, solving simultaneous linear equations, and using a formula to determine the value of a variable. Students can find areas and volumes of simple geometric shapes and use knowledge of geometric properties to solve problems. They can solve probability problems and interpret data in a variety of graphs and tables.

Intermediate International Benchmark – 475

Students can apply basic mathematical knowledge in straightforward situations. They can add, subtract, or multiply to solve one-step word problems involving whole numbers and decimals. They can identify representations of common fractions and relative sizes of fractions. They understand simple algebraic relationships and solve linear equations with one variable. They demonstrate understanding of properties of triangles and basic geometric concepts including symmetry and rotation. They recognize basic notions of probability. They can read and interpret graphs, tables, maps, and scales.

Low International Benchmark – 400

Students have some basic mathematical knowledge.

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

Tabel 4.5 Vlaamse wiskundeprestaties in TIMSS 2003 in het tweede jaar secundair onderwijs

	Vlaanderen	Internationaal gemiddelde
minstens 625 punten (gevorderde standaard)	9%	7%
minstens 550 punten (hoge standaard)	47%	23%
minstens 475 punten (tussenliggende standaard)	82%	49%
minstens 400 punten (lage standaard)	95%	74%

Tabel 4.6 Internationale rangschikking van TIMSS 2003 in het vierde leerjaar van het lager onderwijs (links) en het tweede jaar van het secundair onderwijs (rechts), met de gemiddelde score en de gemiddelde leeftijd van de deelnemende leerlingen op het moment van de afname

Landen	Gemiddelde score	Gemiddelde leeftijd
Singapore	594 (5.6)	10.3
Hongkong	575 (3.2)	10.2
Japan	565 (1.6)	10.4
Taipei (China)	564 (1.8)	10.2
Vlaanderen	551 (1.8)	10.0
Nederland	540 (2.1)	10.2
Letland	536 (2.8)	11.1
Litouwen	534 (2.8)	10.9
Russische Federatie	532 (4.7)	10.6
Engeland	531 (3.7)	10.3
Hongarije	529 (3.1)	10.5
Verenigde Staten	518 (2.4)	10.2
Cyprus	510 (2.4)	9.9
Moldavië	504 (4.9)	11.0
Italië	503 (3.7)	9.8
Australië	499 (3.9)	9.9
Internationaal gem.	495 (0.8)	10.3
Nieuw-Zeeland	493 (2.2)	10.0
Schotland	490 (3.3)	9.7
Slovenië	479 (2.6)	9.8
Armenië	456 (3.5)	10.9
Noorwegen	451 (2.3)	9.8
Iran	389 (4.2)	10.4
Filippijnen	358 (7.9)	10.8
Marokko	347 (5.1)	11.0
Tunesië	339 (4.7)	10.4

Landen	Gemiddelde score	Gemiddelde leeftijd
Singapore	605 (3.6)	14.3
Zuid-Korea	589 (2.2)	14.6
Hongkong	586 (3.3)	14.4
Taipei (China)	585 (4.6)	14.2
Japan	570 (2.1)	14.4
Vlaanderen	537 (2.8)	14.1
Nederland	536 (3.8)	14.3
Estland	531 (3.0)	15.2
Hongarije	529 (3.2)	14.5
Maleisië	508 (4.1)	14.3
Letland	508 (3.2)	15.0
Russische Federatie	508 (3.7)	14.2
Slowakije	508 (3.3)	14.3
Australië	505 (4.6)	13.9
Verenigde Staten	504 (3.3)	14.2
Litouwen	502 (2.5)	14.9
Zweden	499 (2.6)	14.9
Schotland	498 (3.7)	13.7
Israël	496 (3.4)	14.0
Nieuw-Zeeland	494 (5.3)	14.1
Slovenië	493 (2.2)	13.8
Italië	484 (3.2)	13.9
Armenië	478 (3.0)	14.9
Servië	477 (2.6)	14.9
Bulgarije	476 (4.3)	14.9
Roemenië	475 (4.8)	15.0
Internationaal gem.	467 (0.5)	14.5
Noorwegen	461 (2.5)	13.8
Moldavië	460 (4.0)	14.9
Cyprus	459 (1.7)	13.8
Macedonië	435 (3.5)	14.6
Libanon	433 (3.1)	14.6
Jordanië	424 (4.1)	13.9
Iran	411 (2.4)	14.4
Indonesië	411 (4.8)	14.5
Tunesië	410 (2.2)	14.8
Egypte	406 (3.5)	14.4
Bahrein	401 (1.7)	14.1
Palestina	390 (3.1)	14.1
Chili	387 (3.3)	14.2
Marokko	387 (2.5)	15.2
Filippijnen	378 (5.2)	14.8
Botswana	366 (2.6)	15.1
Saoedi-Arabië	332 (4.6)	14.1
Ghana	276 (4.7)	15.5
Zuid-Afrika	264 (5.5)	15.1

Voor het volledige onderzoek over wiskunde (alle deeldomeinen samen) geeft Tabel 4.6 de internationale rangschikkingen. In het basisonderwijs presteren leerlingen uit vier onderwijssystemen (donkerroos) significant beter dan leerlingen in Vlaanderen. Leerlingen in Vlaanderen presteren significant beter dan het internationaal gemiddelde (wit).

Op het einde van de eerste graad secundair onderwijs (dus na acht jaar formeel onderwijs in de deelnemende landen) presteren leerlingen uit vijf onderwijssystemen (donkerroos) beter dan leerlingen in Vlaanderen. De drie landen die in de tabel dezelfde kleur hebben als Vlaanderen presteren even goed als Vlaanderen. Ook hier scoort Vlaanderen significant beter dan de meeste andere landen (lichtroos) en dan het internationaal gemiddelde (wit).

De deeldomeinen 'getallen', 'patronen en relaties' en 'algebra' worden verder besproken in dit hoofdstuk.

Ook in TIMSS is te zien dat de graad van abstractie toeneemt naarmate de leerlingen ouder worden: het deeldomein 'algebra' in het tweede leerjaar van het secundair onderwijs is een uitbreiding van het deeldomein 'patronen en vergelijkingen' in het vierde leerjaar van het basisonderwijs. In het deeldomein 'algebra' wordt het deeldomein 'algebraïsche uitdrukken' toegevoegd aan de drie onderdelen die in het vierde leerjaar het deeldomein 'patronen en relaties' vormen (Tabel 4.1).

Naast het gemiddelde resultaat van de leerlingen die internationaal en in Vlaanderen deelnamen, wordt in Tabellen 4.7 en 4.8 ook de plaats in de internationale rangschikking gegeven.

Tabel 4.7 Gemiddelde prestaties in TIMSS 2003 in het vierde leerjaar van het lager onderwijs

Deelgebieden wiskunde	Vlaanderen	Intern. gemidd.	Rangschikking
Getallen	549 (1.9)	495 (0.7)	5e
Patronen en relaties	542 (1.9)	495 (0.7)	6e

De gemiddelde score in Nederland voor 'getallen' was 536, voor 'patronen en relaties' 527. Net zoals in Vlaanderen zijn beide scores significant hoger dan het internationale gemiddelde.

Tabel 4.8 Gemiddelde prestaties in TIMSS 2003 in het tweede leerjaar van het secundair onderwijs

Deelgebieden wiskunde	Vlaanderen	Intern. gemidd.	Rangschikking
Getallen	539 (2.7)	467 (0.5)	6e
Algebra	523 (2.8)	467 (0.5)	8e

De gemiddelde score in Nederland voor 'getallen' was 539, voor 'algebra' 514. Net zoals in Vlaanderen zijn beide scores significant hoger dan het internationale gemiddelde.

2.1.2 TIMSS – vierde leerjaar basisonderwijs

De voorbeeldopgaven in een groen kader hieronder illustreren de verschillende standaarden voor het vierde leerjaar in de deeldomeinen 'getallen' en 'patronen en relaties'. Waar mogelijk werd de Nederlandstalige opgave gegeven, zoals de leerlingen in Vlaanderen en Nederland deze kregen. Van enkele voorbeeldopgaven is de Nederlandstalige versie niet vrijgegeven.

De eerste opgave behoort tot de gevorderde standaard. Dit betekent dat deze opgave juist werd opgelost door de meerderheid van leerlingen die standaard 'gevorderd' halen. Ook bij de andere opgaven uit TIMSS wordt de standaard gegeven.

TIMSS - Vierde leerjaar lager onderwijs, deeldomein ‘getallen’ – gevorderde standaard

Welk van deze betekent $\frac{7}{10}$?

A. 70
B. 7
C. 0,7
D. 0,07

Juist antwoord	C	
Percentage juiste antwoorden	**Vlaanderen**	**73%**
	Internationaal	**43%**

In Nederland beantwoordde 29% van de leerlingen deze opgave juist.

TIMSS – Vierde leerjaar lager onderwijs, deeldomein ‘patronen en relaties’ – hoge standaard

□ stelt het aantal tijdschriften voor die Lina elke week leest. Waar zie je het totale aantal tijdschriften voorgesteld dat Lina leest in 6 weken?

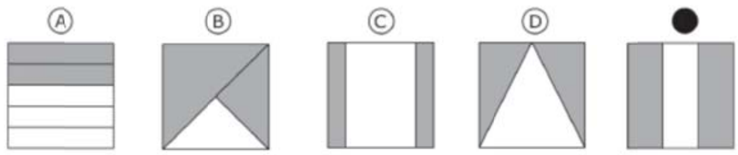
A. 6 + □
B. 6 x □
C. □ + 6
D. (□ + □) x 6

Juist antwoord	B	
Percentage juiste antwoorden	**Vlaanderen**	**67%**
	Internationaal	**58%**

In Nederland beantwoordde 72% van de leerlingen deze opgave juist

TIMSS – Vierde leerjaar lager onderwijs, deeldomein ‘getallen’ – tussenliggende standaard

Which shows $\frac{2}{3}$ of the square shaded?



Het percentage juiste antwoorden bedroeg in Vlaanderen 79%, internationaal was dat 57%.

In Nederland beantwoordde 73% van de leerlingen deze opgave juist.

TIMSS – Vierde leerjaar lager onderwijs, deeldomein ‘getallen’ – lage standaard

$15 \times 9 =$

Answer: 135

Het percentage juiste antwoorden bedroeg in Vlaanderen 84%, internationaal was dat 72%.

In Nederland beantwoordde 86% van de leerlingen deze opgave juist.

2.1.3 PPON

Vlaanderen presteert dus internationaal goed op de wiskundige deeldomeinen over rekenen: ‘getallen’ en ‘patronen en relaties’, ook op de andere deeldomeinen zijn de Vlaamse resultaten voor vierde leerjaar van het lager onderwijs goed. Leerlingen in Nederland presteren ook goed in TIMSS. In Nederland stelt men vast dat de resultaten op de eigen peilingen (PPON) over de kerndoelen voor het domein ‘getallen’ niet zo goed zijn. Tabel 4.9 geeft de resultaten van PPON wiskunde einde primair onderwijs van 2004 voor toetsen in de domeinen ‘getallen en bewerkingen’ en ‘verhoudingen, breuken en procenten’ (Janssen e.a. 2005).

Tabel 4.9 Prestaties in PPON op het einde van het primair onderwijs

PPON - toetsen	het percentage leerlingen dat de kerndoelen haalt per toets met standaard voldoende:
getallen en getalrelaties	42%
schattend rekenen	42%
tabellen en grafieken	50%
rekenen met zakrekenmachine	34%
basisoperaties, optellen en aftrekken	76%
hoofdrekenen, optellen en aftrekken	50%
bewerkingen, optellen en aftrekken	27%
basisoperaties, vermenigvuldigen en delen	66%
hoofdrekenen, vermenigvuldigen en delen	66%
bewerkingen, vermenigvuldigen en delen	12%
verhoudingen	66%
breuken	60%
procenten	50%

Leerlingen rekenen beter als ze bewerkingen opschrijven (cijferen) dan als ze hoofdrekenen, dat is zichtbaar in de Vlaamse en de Nederlandse peilingen. In Nederland stelt van der Schoot (2008) vast dat de vaardigheid om bewerkingen te maken significant daalt in opeenvolgende peilingen bij leerlingen op het einde van de basisschool. In Vlaanderen zijn de resultaten in het domein ‘getallen en bewerkingen’ op de herhalingstoetsen in 2009 vergelijkbaar met de resultaten van 2002. De resultaten voor de toetsen over ‘verhoudingen’ en ‘breuken’ zijn in Nederland ook ongeveer constant over de jaren.

In Vlaanderen kwamen in de toetsen ‘hoofdrekenen’ en ‘cijferen’ de vier bewerkingen gemengd aan bod, maar bij snelrekenen werden de vier bewerkingen apart getoetst. Optellen en aftrekken zijn beter geautomatiseerd dan vermenigvuldigen en delen. Het gaat bij snelrekenen om eenvoudige oefeningen: optellen en aftrekken met natuurlijke getallen tot een maximum resultaat van 20, de deel- en vermenigvuldigingstafels van 1 tot 10. Automatisatie van de vier bewerkingen werd in Nederland niet gepeild.

Bij vergelijkbare cijferoefeningen maken leerlingen in Vlaanderen staartdelingen en vermenigvuldigingen beter als ze de opgave niet meer zelf moeten schikken, in Nederland moeten de leerlingen de oefeningen steeds zelf schikken. Leerlingen presteren in Nederland opvallend beter op de toetsen over ‘basisoperaties’ dan op de toetsen over ‘bewerkingen’. Bij ‘basisoperaties’ moeten de leerlingen kale opgaven maken waarbij ze elke berekening moeten maken in een beperkte tijd, bij ‘bewerkingen’ moeten de leerlingen vergelijkbare en moeilijkere oefeningen maken die meestal in context worden aangeboden. Leerlingen mochten hierbij steeds tussenuitkomsten opschrijven.

Net als in Nederland is er in Vlaanderen een dalend aantal leerlingen dat ‘verhoudingen’ (75%), ‘breuken’ (64%) en ‘procenten’ (59%) beheerst. De inhouden van de toetsen over verhoudingen zijn vergelijkbaar, al zitten er in de Vlaamse peilingen wat meer oefeningen over schaal dan in de Nederlandse. De Vlaamse toets over ‘breuken’ bevat ook de kommagetallen, waar leerlingen in Nederland vergelijkbare oefeningen krijgen in de toets over ‘getallen en getalrelaties’. Is het mogelijk dat leerlingen bij ‘verhoudingen’ nog goed presteren omdat ze het verband zien met de concrete realiteit, maar dat meer leerlingen afhaken als de taal om de verhoudingen te beschrijven formeler wordt, in breuken en procenten?

In de achtergrondvragenlijsten van de leerlingen werd in Vlaanderen voor de drie wiskundepeilingen gevraagd naar activiteiten tijdens de wiskundelessen. In de drie peilingen deden de leerlingen die aangeven dat ze meer ‘werken met breuken en kommagetallen’ het significant beter dan leerlingen die aangeven dat ze dit niet doen. Het is hierbij niet mogelijk om vast te stellen of deze betere prestatie het gevolg is van de activiteit, of beide het gevolg zijn van een andere factor.

De laatste toets uit het domein ‘getallen en bewerkingen’ in de Vlaamse peiling gaat over ‘procentberekening in praktische situaties’. Het resultaat hierop is erg bemoedigend: waar in 2002 maar 42% van de leerlingen deze eindtermen bereikte, was dat 59% in 2009. Net als in Vlaanderen verbetert in Nederland het resultaat op de toets over ‘procenten’, Nederlandse leerlingen behalen in elke volgende peiling een beter resultaat voor deze toets.

In Nederland is er een groot verschil in de resultaten op deze toetsen, dit is in Vlaanderen ook zo. De spreiding op de resultaten over de verschillende toetsen is in Vlaanderen niet zo groot als in Nederland.

In de Vlaamse wiskundepeiling in het basisonderwijs zijn de resultaten in het domein ‘getallen en bewerkingen’ niet voor alle onderdelen goed: in drie toetsen, over ‘veelvouden en delers’, ‘functies en voorstellingswijzen’ en ‘procentberekening in praktische situaties’, bereikt 60% of minder van de leerlingen de eindtermen. Dit betekent dan 40% van de leerlingen het lager onderwijs verlaat zonder dat ze deze minimumdoelen van het basisonderwijs beheersen.

Nederland en Vlaanderen presteren beide internationaal goed op de wiskundetoetsen in deze deeldomeinen, maar Nederlandse en Vlaamse peilingen vinden er aanzienlijke lacunes in de beheersing van het eigen curriculum. De leeftijden van de gepeilde leerlingen zijn in de Vlaamse en Nederlandse peilingen en in TIMSS voor het basisonderwijs verschillend: Vlaanderen en Nederland peilen op het einde van het basisonderwijs. Beide nationale peilingen nemen ook meer toetsen af, waardoor wiskundige onderwerpen in veel groter detail in beeld komen. Breuken worden bijvoorbeeld in TIMSS niet apart ondervraagd, al komen er wel opgaven over breuken aan bod in de toets over ‘getallen’. In de voorbeeldvraag over breuken (gevorderde standaard) scoort Nederland ver onder het internationale gemiddelde. Vlaamse leerlingen hebben op het moment van de afname van TIMSS (in de loop van het vierde leerjaar) duidelijk al meer over breuken geleerd. Leerlingen in Nederland hebben op het einde van het basisonderwijs ook veel leerinhouden over breuken verworven.

2.1.4 TIMSS – secundair onderwijs, eerste graad

De voorbeeldopgaven hierna, in een blauw kader, illustreren de verschillende standaarden voor het tweede jaar secundair onderwijs in de deeldomeinen ‘getallen’ en ‘algebra’.

TIMSS - Tweede leerjaar SO, deeldomein ‘algebra’ – gevorderde standaard

The three figures below are divided into small congruent triangles.

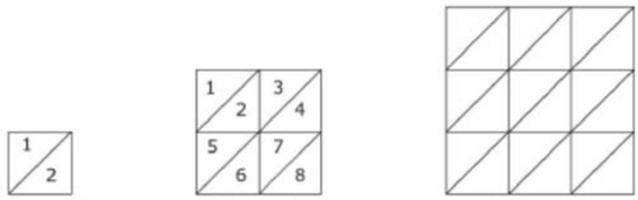


Figure 1 Figure 2 Figure 3

A. Complete the table below. First, fill in how many small triangles make up Figure 3. Then, find the number of small triangles that would be needed for the 4th figure if the sequence of figures is extended.

Figure	Number of Small Triangles
1	2
2	8
3	18
4	32

B. The sequence of figures is extended to the 7th figure. How many small triangles would be needed for Figure 7?

Answer: 98

$7^2 \times 2$
49×2

C. The sequence of figures is extended to the 50th figure. Explain a way to find the number of small triangles in the 50th figure that does not involve drawing it and counting the number of triangles.

$50^2 \times 2$
2500×2
5000

Deze opgave hoort bij de gevorderde standaard.

Het percentage juiste antwoorden bedroeg in Vlaanderen 21%, internationaal was dat 14%.

In Nederland beantwoordde 36% van de leerlingen deze opgave juist.

TIMSS - Tweede leerjaar SO, – deeldomein ‘getallen’ – hoge standaard

A scoop holds $\frac{1}{5}$ kg of flour. How many scoops of flour are needed to fill a bag with 6 kg of flour?

Answer: $6 \div \frac{1}{5}$

6×5

30 scoops

Het percentage juiste antwoorden bedroeg in Vlaanderen 62%, internationaal was dat 38%.

In Nederland beantwoordde 74% van de leerlingen deze opgave juist.

TIMSS - Tweede leerjaar SO, – deeldomein ‘algebra’ – tussenliggende standaard

Als $\frac{12}{n} = \frac{36}{21}$, dan is n gelijk aan

A. 3
B. 7
C. 36
D. 63

Juist antwoord	B	
Percentage juiste antwoorden	**Vlaanderen**	**86%**
	Internationaal	**65%**

In Nederland beantwoordde 85% van de leerlingen deze opgave juist.

TIMSS - Tweede leerjaar SO, – deeldomein ‘getallen’ – tussenliggende standaard

Alice ran a race in 49.86 seconds. Betty ran the same race in 52.30 seconds. How much longer did it take Betty to run the race than Alice?

● 2.44 seconds
Ⓑ 2.54 seconds
Ⓒ 3.56 seconds
Ⓓ 3.76 seconds

Het percentage juiste antwoorden bedroeg in Vlaanderen 71%, internationaal was dat 61%.

In Nederland beantwoordde 81% van de leerlingen deze opgave juist.

TIMSS - Tweede leerjaar SO, – deeldomein ‘getallen’ – lage standaard

Welk getal ligt het dichtst bij 10?

A. 0,10
B. 9,99
C. 10,10
D. 10,90

Juist antwoord	B	
Percentage juiste antwoorden	**Vlaanderen**	**94%**
	Internationaal	**77%**

In Nederland beantwoordde 97% van de leerlingen deze opgave juist.

Vlaanderen presteert internationaal goed op de wiskundige deeldomeinen ‘getallen’ en ‘algebra’ en ook op de andere deeldomeinen zijn de TIMSS-resultaten voor Vlaamse leerlingen in het tweede jaar van het secundair onderwijs goed. Dit staat in contrast met de resultaten op de Vlaamse peilingen: in de A-stroom zijn enkel de resultaten over ‘getalinzicht’ goed, voor alle andere toetsen over ‘getallenleer’ en ‘algebra’ bereikt minder dan 60% van de leerlingen de eindtermen, en in twee toetsen over getallenleer is dat zelfs minder dan 30% van de leerlingen. In de B-stroom beheerst minder dan de helft van de leerlingen de ontwikkelingsdoelen over ‘getalinzicht en hoofdbewerkingen’.

Daar waar er voor het basisonderwijs een verschil is tussen de doelpopulatie van TIMSS (4e leerjaar) en de Vlaamse wiskundepeilingen (6e leerjaar), werden TIMSS en de Vlaamse peilingen in het secundair allebei afgenomen bij leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs.

Een mogelijke verklaring voor de slechte resultaten op de Vlaamse peilingen ligt in het aantal eindtermen dat in het de eerste graad nog niet aan bod kwam. Bij de wiskundepeiling in de A-stroom werd aan de leerkrachten gevraagd welke eindtermen nog niet aan bod kwamen in de lessen wiskunde van de eerste graad. Deze informatie is in detail opgenomen in de brochure met de peilingsresultaten van de eerste graad A-stroom (p. 22). Het gaat over een aanzienlijk deel van de minimumdoelen voor deze leerlingen, onder andere uit de domeinen ‘getallenleer’ en ‘algebra’, die soms bij meer dan een derde van de leerlingen nog niet aan bod kwamen. De peiling in de A-stroom werd afgenomen op 27 mei 2009, en alle eindtermen moeten bij alle leerlingen in de A-stroom aan bod komen.

Tabel 4.10 Percentage leerlingen per optiegroep en in de totale steekproef waarbij op 27 mei 2009 eindtermen uit drie peilingstoetsen nog niet werden aangebracht in de lessen wiskunde

Eindterm-nummer	klassieke talen	moderne wetenschappen	technische opties	totale steekproef
Rekenen met veeltermen				
ET 19	4	5	3	**4**
ET 20	39	26	13	**25**
ET 21	3	2	8	**4**
Algebraïsering				
ET 18	6	3	0	**3**
ET 22	6	16	22	**16**
ET 23	23	23	22	**23**

De twee toetsen in de tabel peilden elk naar de beheersing van drie eindtermen (zie bijlage voor de volledige eindtermen). In deze twee toetsen was er telkens één eindterm die bij bijna een vierde van de leerlingen nog niet in de klas aan bod kwam. De resultaten op deze toetsen waren niet goed: ‘rekenen met veeltermen’, 28% en ‘algebraïsering’, 56%. Als deze eindtermen niet of maar kort worden aangebracht in de eerste graad, wordt voor deze leerlingen de spiraalopbouw van het wiskundecurriculum onderbroken. Het is mogelijk een deel van de verklaring voor de resultaten op deze toetsen.

Een belangrijk onderscheid tussen TIMSS en de Vlaamse peiling is het conceptueel kader. TIMSS onderzoekt in hoeverre de leerlingen in de verschillende landen de leerinhouden bereiken die gemeenschappelijk zijn in het wiskundecurriculum van de deelnemende landen. In Vlaanderen zijn de decretaal vastgelegde eindtermen en ontwikkelingsdoelen het uitgangspunt voor de peilingstoetsen. Het verschil tussen deze kaders kan mee het verschil in de resultaten veroorzaken.

Van Nijlen e.a. (2006) onderzochten in welke mate de conceptuele kaders en opgaven uit TIMSS aansluiten bij de Vlaamse eindtermen en peilingen. De achterliggende vraag was of het mogelijk is om aan de hand van internationaal onderzoek een uitspraak te doen over het bereiken van de eindtermen.

De conclusies van dit onderzoek waren verschillend voor de twee leeftijdsgroepen. In het basisonderwijs is er een tamelijk grote overeenkomst tussen de eindtermen van wiskunde en het conceptuele kader van TIMSS: Van Nijlen e.a. schrijven: “*Zo is de overeenkomst tussen het TIMSS-kader en de eindtermen wiskunde in het basisonderwijs wel redelijk groot, maar komt toch een aantal eindtermen helemaal niet of op een minder eenduidige manier aan bod in het gebruikte conceptuele kader*. (Van Nijlen e.a., 2006, p. 65)” Er is volgens Van Nijlen e.a. een aantal eindtermen dat niet aan bod komt in het TIMSS, maar de leerlingen van het vierde leerjaar hebben ook nog twee jaar om aan de eindtermen te werken: de eindtermen zijn geformuleerd voor het einde van het basisonderwijs. Het is niet mogelijk om uit de beschikbare informatie vast te stellen in welke mate de eindtermen die niet aan bod komen in het TIMSS, ook degene zijn waaraan de leerlingen nog werken in de laatste twee jaren van het basisonderwijs.

De overeenkomst tussen het TIMSS-kader en de eindtermen van de A-stroom in de eerste graad van het secundair onderwijs is volgens Van Nijlen ook tamelijk groot. In de eerste graad wordt de peiling afgenomen in het tweede jaar van de eerste graad. Er is dus nagenoeg geen onderwijstijd meer om in de eerste graad nog aan de eindtermen te werken.

De overeenkomst van de internationale peilingen met de ontwikkelingsdoelen van de B-stroom is in het onderzoek van Van Nijlen niet onderzocht. Uit een vergelijking van de voorbeeldopgaven van TIMSS en de ontwikkelingdoelen van de B-stroom lijkt de overeenkomst zeer laag. De leerlingen van de B-stroom namen ook deel aan TIMSS. TIMSS noch de Vlaamse peilingen werden afgenomen in het buitengewoon onderwijs.

Samengevat zijn er dus verschillende redenen die een vergelijking tussen de resultaten van de Vlaamse peiling en het TIMSS onderzoek minder doorzichtig maken:

- in het basisonderwijs passen de meeste eindtermen in het conceptueel kader van TIMSS, maar wordt TIMSS afgenomen in het vierde leerjaar en de peilingen in het zesde leerjaar.
- in de A-stroom van het secundair onderwijs passen de meeste eindtermen in het conceptueel kader van TIMSS en worden beide peilingen afgenomen in het tweede jaar van het secundair onderwijs. Leerkrachten geven wel aan dat niet alle eindtermen behandeld werden.
- in de B-stroom lijkt er weinig overeenkomst tussen de ontwikkelingsdoelen en TIMSS.

2.2 Algebraïsch rekenen

2.2.1 Bevestigen andere bronnen de peilingsresultaten?

Verschillende bronnen geven aan dat de ook in ander onderzoek en in andere landen gelijkaardige vaststellingen worden gedaan over de vaardigheden van leerlingen op het vlak van algebraïsch rekenen. Hier volgt een beknopt overzicht.

2.2.1.1 Informatie uit Wallonië

Volgens een rapport van de onderwijsinspectie van de Waalse gemeenschap (Godet, 2010) leidt de aanpak binnen het wiskundeonderwijs niet tot het gewenste niveau van automatisering op het einde van de eerste graad. Dat blijkt bijvoorbeeld uit de resultaten op de toets ‘l’épreuve CE1D’, die is afgenomen bij leerlingen op het einde van de eerste graad. Tabel 4.11 geeft enkele opgaven weer en het percentage leerlingen dat deze opgaven correct oploste.

Tabel 4.11 Voorbeelden uit l’épreuve CE1D

opgave	Percentage juist
t+5-3t=	65%
y-(9-y)=	49%
$(x-3)^2=$	39%

In de Vlaamse wiskundepeiling (A-stroom) koos 32% van de leerlingen het juiste antwoord op deze bijkomende opgave, 1% van de leerlingen liet de opgave open.

$(2c - 5)^2 =$

☐ $4c^2 + 25$
☐ $4c^2 - 25$
☐ $4c^2 - 10c + 25$
☒ $4c^2 - 20c + 25$

SeO-A

2.2.1.2 Informatie uit Nederland

2.2.1.2.1 Het rapport Meijerink

In Nederland is in 2008 het rapport Meijerink *‘Over de drempels met taal en rekenen’* van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen verschenen. Deze expertgroep werd in 2007 geïnstalleerd door de Nederlandse minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap. De aanleiding was het te lage reken- en taalniveau van instromende studenten van de lerarenopleiding lager onderwijs, de pabostudenten. De opdracht van de expertgroep bestond erin een inhoudelijk advies te formuleren over wat leerlingen van basis- tot hoger onderwijs moeten kennen en kunnen op het gebied van taal en rekenen.

Volgens de expertgroep geven onderzoeken van de laatste 20 jaar geen reden aan om de kwaliteit van het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs ter discussie te stellen. Uit het PISA-onderzoek van 2007 blijkt dat de vaardigheid in wiskunde van 15-jarigen in Nederland tot de hoogste in de wereld behoort. Wel wordt deze vaardigheid sinds 2000 geleidelijk minder. Bij het TIMSS-onderzoek blijken rekenen, meetkunde en statistiek de relatief sterkere domeinen van de leerlingen van 14 jaar. De score op de domeinen algebra en meetkunde halen de gemiddelde score omlaag. De laagst scorende helft scoort in Nederland beter dan elders, de hoogst scorende helft blijft daarentegen achter.

In het secundair onderwijs zijn de onderzoeksgegevens beperkt. Er zijn enkel gegevens van het VOCL (Voortgezet Onderwijs Cohort Leerlingen). Deze studie volgt een groep leerlingen gedurende hun loopbaan in het secundair en hoger onderwijs. Er zijn studies gestart in 1989, 1993 en 1999. Dat geeft de mogelijkheid om voor- en achteruitgang van prestatieniveaus na te gaan. Uit deze vergelijkingen blijkt dat de scores van leerlingen uit de academische leerweg (vwo-havo) significant minder goed worden. Deze theoretische leerweg is vergelijkbaar met het Vlaamse algemeen secundair onderwijs. Leerlingen kunnen in Nederland vanaf 12 jaar voor deze leerweg kiezen.

Bij de lerarenopleiding basisonderwijs in Nederland is de beginsituatie van de instromende studenten zeer divers. In 2006 bleek dat 48% van de studenten die begonnen aan de opleiding onderwijzer niet slaagde voor de rekentoets op niveau basisonderwijs.

Een conclusie van het rapport is dat de lat voor rekenen wel wat hoger gelegd mag worden. Verder vermeldt het rapport dat bij de overgang van het basisonderwijs naar havo – vwo de leerlijnen rekenen en wiskunde niet goed aansluiten.

2.2.1.2.2 Informatie van het Freudenthal-instituut

Het Freudenthal-instituut is een internationaal gerenommeerd instituut dat afhangt van de universiteit van Utrecht. Het doel van dit instituut is de kwaliteit van het onderwijs in rekenen, wiskunde en natuurwetenschappen te bevorderen, zowel in het basisonderwijs (*primair*) als het secundair onderwijs (*voortgezet*). Medewerkers houden zich bezig met onderzoek, opleiding, curriculumontwikkeling en dienstverlening.

In *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* omschrijven Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) de Nederlandse situatie. In algebra worden veel fouten gemaakt, doordat leerlingen onvoldoende om kunnen gaan met het taal- en regelaspect van de zelfstandige algebra. Vaak gebeuren die fouten op onbedachte momenten. Kindt (2006) schrijft in dezelfde uitgave dat klachten over de beheersing van algebraïsche vaardigheden van alle tijden zijn, maar dat er de laatste jaren meer zijn.

2.2.1.3 Informatie uit Finland

Finland wordt internationaal geroemd om zijn knappe resultaten op opeenvolgende internationale PISA-onderzoeken. Hoge gemiddelde scores gaan er samen met een kleine invloed van de sociaaleconomische situatie van de leerlingen op hun prestaties.

Nochtans blijken de huidige Finse leerlingen op het vlak van rekenvaardigheden in kale opgaven (die bij PISA niet worden aangeboden) zwakker te scoren dan een vorige generatie. Näveri (in Martio (2009)) vergeleek de prestaties van leerlingen van 15-16 jaar in 1981 en 2003. In Tabellen 4.12 tot en met 4.14 volgen voorbeeldopgaven uit het onderzoek van Näveri en het percentage leerlingen dat een opgave juist beantwoordde in 1981 en 2003. De achteruitgang voor de oefeningen op breuken en algebra is groot.

Tabel 4.12 Vergelijkingen tussen prestaties van Finse leerlingen in 1981 en 2003 bij opgaven over vermenigvuldiging en machten in het onderzoek van Näveri

	1981	2003
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$	95,2%	90,1%
$(-3)^2 = 9$	67,8%	47,5%
$18 \cdot 4 \cdot 32 \cdot 15 = 15 \cdot 32 \cdot 4 \cdot 18$	93,2%	85,9%
$0{,}015 \cdot 248 = 0{,}15 \cdot 24{,}8$	66,8%	62,3%
$0 \cdot 846 = 0 \cdot 0{,}536$	79,0%	65,6%

Tabel 4.13 Vergelijkingen tussen prestaties van Finse leerlingen in 1981 en 2003 bij opgaven over breuken in het onderzoek van Näveri

	1981	2003
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=$	56,4%	36,9%
$\frac{4}{3}\cdot 5=$	66,3%	44,4%
$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=$	56,5%	28,3%
$\frac{1}{5}:3=$	49,2%	27,5%
$\frac{1278}{2}=$	55,1%	36,8%

Tabel 4.14 Vergelijkingen tussen prestaties van Finse leerlingen in 1981 en 2003 bij algebra-opgaven in het onderzoek van Näveri

	1981	2003
$10^3.10^2=$	72,5%	43,3%
$x^4\cdot x^5=$	71,7%	47,3%
$(59^2)^3=(59^3)^2$	61,1%	31,7%

2.2.1.4 Rekenproblemen bekeken door een historische bril

Sfard (1995) stelt vast dat de groei in wetenschappelijk denken door de eeuwen heen gebeurde in opeenvolgende fasen.

Moeilijkheden die leerlingen ondervinden bij de overgang tussen verschillende fasen kunnen zeer dicht aansluiten bij moeilijkheden die generaties wiskundigen in het verleden hebben ervaren. De leerlijn in de huidige eindtermen wiskunde is ook vanuit die visie geschreven.

De stap van een operationele aanpak (rekenen met concrete getallen en grootheden) naar een structurele aanpak (werken met abstracte objecten, zoals veeltermen en vergelijkingen) is in de geschiedenis van de wiskunde pas laat gezet. Door deze stap werd in de wiskunde voortaan gewerkt met objecten die op zichzelf staan en waarvan het verband met een concreet probleem niet zo vanzelfsprekend is. Het is dan ook niet onlogisch dat het manipuleren van veeltermen en vergelijkingen ook voor leerlingen een grote stap is.

2.2.2 Wat zijn mogelijke verklaringen voor rekenproblemen?

In vakliteratuur worden verschillende mogelijke oorzaken vermeld. Hieronder volgen enkele beschouwingen.

2.2.2.1 Onderbroken leerlijn volgens de Waalse onderwijsinspectie

De Waalse onderwijsinspectie (Godet, 2010) stelt in haar verslag dat er eerder sprake is van een breuk dan van een overgang tussen basisonderwijs en secundair onderwijs. De Waalse onderwijsinspectie vergelijkt de aanpak in het wiskundeonderwijs met het bouwen van een muur, waarbij elk jaar bakstenen aan de muur worden toegevoegd. Leerkrachten vinden het niet erg als een gedeelte van de muur in een bepaald jaar niet kan behandeld worden, als dat leerstof is die een volgend jaar ook op het programma staat. Zo worden kansen op herhaaldelijk inslijpen van de leerstof gemist. De inspectie vermeldt verder in het rapport dat het secundair onderwijs te veel tijd besteedt aan algebra. Ook worden bepaalde procedures overvloedig ingeoefend, met weinig variatie in de oefeningen, soms met een vroegtijdig gebruik van een specifieke woordenschat of een overdreven moeilijkheidsgraad. Dit leidt volgens de Waalse onderwijsinspectie niet tot het gewenste niveau van automatisering.

2.2.2.2 Het verschil tussen rekenkunde en algebra

2.2.2.2.1 Operationeel en structureel denken

Sfard (1995) onderkent verschillende fasen in de geschiedenis van de algebra. In de eerste fase, die van de retorische en verkorte (syncopische) algebra, werden berekeningen omschreven in woorden of in een mengeling van woorden en symbolen. Er werden algoritmen opgesteld waarmee hele families van problemen konden worden opgelost. Deze algoritmen werden meestal uitgelegd aan de hand van concrete numerieke voorbeelden, eerder dan met algemene omschrijvingen. Bij het oplossen van vergelijkingen werd teniet gedaan wat met het gezochte getal gebeurd was. Er werd dus teruggerekend. In de symbolische algebra, die ontstond in de 16de eeuw, worden vergelijkingen opgelost door vooruit te werken. Bewerkingen worden tegelijkertijd in twee leden van een vergelijking toegepast. Operationeel denken wordt vervangen door structureel denken. En dat is een grote stap, ook voor leerlingen.

2.2.2.2.2 Rekenkundige en algebraïsche oplossingswijzen

Het verschil tussen rekenkundige en algebraïsche oplossingswijzen van vraagstukken kan geïllustreerd worden met het vraagstuk in Tabel 4.15 (uit Van Dooren e.a., 2001).

Tabel 4.15 *Voorbeeldvraagstuk uit Van Dooren e.a. (2001)*

Een lagere school telt 345 leerlingen die moeten kiezen tussen skaten, zwemmen en fietsen. Er kozen twee keer zoveel leerlingen voor skaten als voor fietsen, en er kozen 30 leerlingen minder voor zwemmen dan voor skaten. Er kozen 120 leerlingen voor zwemmen. Hoeveel leerlingen kozen voor skaten en fietsen?

Een mogelijke rekenkundige oplossing, waarbij er teruggerekend wordt, ziet er als volgt uit:

120 leerlingen kiezen voor zwemmen. Dat zijn er 30 minder dan voor skaten. Dus: 150 leerlingen kiezen voor skaten. En dat zijn er dubbel zoveel als de leerlingen die voor fietsen kiezen. 75 leerlingen kiezen dus voor fietsen.

Daartegenover staat een algebraïsche oplossing. Hierbij worden de relaties tussen de onbekenden via het gebruik van onbekenden in een vergelijking voorgesteld. De oplossing van het probleem wordt dan gevonden door deze vergelijking volgens welbepaalde regels te transformeren. Voor bovenstaand vraagstuk kan bijvoorbeeld de volgende vergelijking opgesteld worden:

x = aantal fietsen. Dan $x + 2x + (2x-30) = 345$.

Van Dooren gaat in zijn bijdrage in het hoofdstuk over toenemende abstractie verder in op het verschil tussen rekenkundige en algebraïsche oplossingswijzen.

2.2.2.2.3 Het verschil in het gelijkheidsteken

Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) maken een analoog onderscheid tussen rekenkunde en algebra. Volgens hem hebben formules voor leerlingen vaak het karakter van een procesbeschrijving. ‘=’ staat dan voor ‘en dat geeft als uitkomst…’, zoals in ‘9-1=8’.

In het basisonderwijs wordt het gelijkheidsteken ook op die manier gebruikt, maar in het secundair onderwijs niet meer. Bekijk bijvoorbeeld de uitspraak

$$4+6=10:5=2$$

een voorbeeld van het zogenaamde ‘breien’. In het lager onderwijs wordt zo’n uitspraak nog als correct beschouwd, want ‘4+6 geeft als uitkomst 10 en 10:5 geeft als uitkomst 2’.

In het secundair onderwijs krijgt het gelijkheidsteken een andere betekenis. ‘=’ staat dan voor ‘is gelijkwaardig met’. Dat is nodig om met algebraïsche formules te kunnen werken, bijvoorbeeld met de formule $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. De uitspraak ‘4+6=10:5=2’ wordt dan fout, want 4+6 is niet gelijkwaardig met 10:5.

Leerlingen moeten volgens Drijvers, Goddijn en Kindt een algebraïsche expressie als proces en als object kunnen beschouwen en gevoel krijgen voor welke blik op welk moment geschikt is. Dit verschil tussen procesdenken en objectdenken wordt door Herscovics en Linchevski (1994) de kloof tussen rekenen en algebra genoemd.

2.2.2.3 Problemen met het minteken

Vlassis (2004) deed onderzoek naar de moeilijkheden die leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs in Wallonië ondervinden bij het herleiden (vereenvoudigen) van veeltermen met mintekens. Volgens Vlassis zijn er twee grote oorzaken die voor problemen zorgen rond het minteken. Allereerst hebben leerlingen bij bewerkingen met natuurlijke getallen al dan niet bewust een aantal methoden geleerd die niet meer kloppen voor negatieve getallen. Zo is het niet meer waar dat in de uitspraak a-b ‘a’ altijd groter is dan ‘b’. Verder moeten leerlingen het concept ‘negativiteit’ geleidelijk ontwikkelen en hierbij het minteken flexibel leren interpreteren en gebruiken. Een minteken kan immers verschillende betekenissen hebben: een toestandsteken (bijvoorbeeld -3 is een negatief getal), het tegengestelde van een getal (bijvoorbeeld –x is het tegengestelde van x), een bewerkingsteken (bijvoorbeeld 8-3) …

In Tabel 4.16 staan enkele fouten die leerlingen bij het onderzoek van Vlassis maakten. Telkens wordt omschreven wat er fout loopt en hoe zulke fouten kunnen ontstaan. De fouten zijn aangeduid in het rood.

Tabel 4.16 Voorbeelden van rekenfouten uit het onderzoek van Vlassis

Opgave	Uitwerking door leerlingen	reden
20+8-7n-5n=	28-2n via 20+8-(7n-5n)	Minteken wordt gezien als een splitsing van de veelterm in 2 operaties met natuurlijke getallen
6-5a-3-4a=	9a-9 9a want min x min is plus, -9 want plus x min is min	Tekenregel wordt fout toegepast
7-6n+13=	6-6n 6 want 13-7=6	Rekenen van rechts naar links
2x-7-6x-4=	4x-11 via 6x-2x=4x	Volgorde getallen wordt omgewisseld om het gemakkelijker te maken
6y-20+3y=	3y-20 via 6y-3y=3y	Minteken achter 6y wordt meegenomen in de berekening van de y-coëfficiënt

2.2.2.4 Didactische keuzes

2.2.2.4.1 Verklaring van Harskamp

Harskamp (2008) geeft drie mogelijke verklaringen voor de achteruitgang bij bewerkingen met getallen bij Nederlandse 12-jarigen. Rekenen krijgt minder aandacht en tijd in de basisvorming, een verschuiving naar het gebruik van de rekenmachine versterkt dit en een niet consistente didactiek met teveel mogelijke strategieën zorgt voor onduidelijkheid bij leerlingen.

2.2.2.4.2 Drillen of inzicht

Kindt (2006) omschrijft een aantal mogelijke oorzaken die in Nederland vaak aangehaald worden. De geest van de tijd zou er voor zorgen dat er minder concentratie en streven naar nauwkeurigheid is bij leerlingen. Het wiskundeprogramma heeft slechts een beperkte aandacht voor symbolische manipulatie, onder andere door de permanente beschikbaarheid van rekenapparatuur zoals de grafische rekenmachine. Volgens Kindt zelf dringt "drill and practice" het inzichtelijk handelen naar de achtergrond en leidt het tot 'trucmatige routine'. De beheersing van procedurele vaardigheden nastreven door eindeloze sommen kan leiden tot enkel succes op korte termijn, en is dan tijdverlies. Met deze laatste opmerkingen lijkt hij aan te sluiten bij de bevindingen van de Waalse onderwijsinspectie. Verder merkt Kindt op dat in het algebraonderwijs de vraag 'hoe moet het?' nu veel belangrijker lijkt dan 'waarom is dat zo?'. Dit uit zich in een aantal ezelsbruggetjes, zoals de papegaaienbek en wegstrepen, die klakkeloos getransfereerd worden naar situaties waarbij het niet kan. Bijvoorbeeld:

$$\frac{9-5}{5} = \frac{9-1}{1} = 8.$$

2.2.2.5 Verschillende inzichten bij leerkrachten basisonderwijs en secundair onderwijs

Van Dooren, Verschaffel en Onghena (2001) deden onderzoek naar de rekenkundige en algebraïsche probleemoplossingsvaardigheden en – attitudes van toekomstige leerkrachten lager en secundair onderwijs (bachelors).

Het uitgangspunt was onderzoek van Schmidt (1994, 1996). Volgens Schmidt hebben leerkrachten in het lager en in het secundair onderwijs belangrijke taken bij de introductie in algebra. Leerkrachten lager onderwijs moeten de basiskennis van leerlingen zodanig ontwikkelen dat leerlingen voorbereid zijn op de introductie in algebra. Ze moeten hiervoor zelf beschikken over een minimaal begrip en een zekere beheersing van en appreciatie voor het algebraïsch probleemoplossen. Verder moeten ze een geschikte oplossingsstrategie kunnen kiezen, afhankelijk van de aard van het probleem.
Leerkrachten secundair onderwijs hebben inzicht nodig in de rekenkundige concepten, technieken en gewoonten die leerlingen ontwikkeld hebben in het lager onderwijs, zoals de 'gissen en missen' strategie, of '=' als teken dat aangeeft waar het resultaat moet verschijnen. Ze moeten leerlingen kunnen aantonen dat algebraïsche oplossingsmethoden soms nodig zijn en dat ze geldig zijn. En ze moeten leerlingen leren gebruik maken van zowel rekenkundige als algebraïsche technieken, afhankelijk van de aard van een probleem.

Onderzoek van Schmidt toont echter aan dat leerkrachten in Canada aan het begin van hun opleiding weinig flexibel omgaan met opgaven. Een groot deel van de toekomstige leerkrachten van de basisschool kan geen gebruik maken van een algebraïsche oplossingswijze. Velen zien algebra als een ondoorzichtig systeem gebaseerd op ingewikkelde, arbitraire regels. De overgrote meerderheid van toekomstige leerkrachten secundair onderwijs maakt uitsluitend gebruik van algebraïsche technieken. Rekenkunde wordt afgedaan als inferieur, als een vorm van improvisatie.

Van Dooren e.a. (2001) onderzoeken prestaties van studenten in het begin en op het einde van hun opleiding. Ook gaan ze na of competenties van studenten in het probleemoplossen weerspiegeld worden in evaluaties van rekenkundige en algebraïsche oplossingen. Tenslotte gaan Van Dooren e.a. na of de vaardigheid in het oplossen van vraagstukken en hun voorkeur voor een bepaalde oplossingswijze samenhangen met hun opleiding in het secundair onderwijs. Ze maakten hierbij gebruik van het analysekader van Bednarz en Janvier (in Schmidt en Bednarz, 1997): vraagstukken zijn op zich niet algebraïsch of rekenkundig te noemen, maar op basis van dit analysekader kan men bepalen welke soort oplossing het meest waarschijnlijk wordt uitgelokt. Bijvoorbeeld: het vraagstuk in Tabel 4.15 is een typisch voorbeeld van een rekenkundig vraagstuk, omdat de rekenkundige oplossingswijze het meest voor de hand ligt. Wordt in de opgave het laatste gegeven ('er kozen 120 leerlingen voor zwemmen') weggelaten, dan wordt dit een algebraïsch vraagstuk.

De onderzoekers legden de studenten een toets voor met daarin zes typisch rekenkundige vraagstukken en zes typisch algebraïsche vraagstukken. Verder ontwikkelden ze een eigen classificatieschema voor oplossingsstrategieën met daarin drie categorieën:

- de algebraïsche oplossingswijze;
- het manipuleren van de structuur van het vraagstuk zodat het toch rekenkundig kan opgelost worden (alleen efficiënt bij algebravraagstukken);
- het genereren van getallen als er een startwaarde gegeven is (rekenkundig vraagstuk) of gissen en missen (algebraïsch vraagstuk).

Ze lieten studenten voor zes vraagstukken correcte oplossingen beoordelen: bij elk vraagstuk stond een oplossing uit elk van de drie categorieën beschreven in het classificatieschema.

De onderzoekers kwamen tot de volgende resultaten:

- Voor algebraïsche vraagstukken werden beduidend meer algebraïsche methoden gehanteerd dan voor rekenkundige vraagstukken.
- Kandidaat-leerkrachten secundair onderwijs maakten hoofdzakelijk gebruik van algebra: 93,3% van deze studenten hanteerde deze methode bij algebravraagstukken, 61,4% bij rekenkundige vraagstukken. Kandidaat-leerkrachten basisonderwijs gebruikten veel minder 'algebra': 11% gebruikte algebra bij rekenkundige vraagstukken; bij algebraïsche vraagstukken gebruikte 42,5% algebra, 20,2% manipuleren van structuur, 19,9% gissen en missen en 17,5% vond het antwoord niet.
- Op het einde van hun opleiding maakten aspirant-leerkrachten basisonderwijs niet meer gebruik van rekenkunde en aspirant-leerkrachten secundair onderwijs niet meer gebruik van algebra dan in het begin van hun opleiding.
- Rekenkundige vraagstukken waren gemakkelijker dan algebravraagstukken.
- Toekomstige leerkrachten secundair onderwijs waren erg succesvol bij algebravraagstukken, toekomstige leerkrachten basisonderwijs presteerden hier minder goed.
- De oplossingsvaardigheid van de aspirant-leerkrachten verbeterde naar het einde van hun opleiding.
- Bij rekenkundige vraagstukken heeft elke strategie een tamelijk hoge succesgraad.
- De manier waarop aspirant-leerkrachten vraagstukken oplossen wordt weerspiegeld in hun evaluaties. Kandidaat-leerkrachten secundair onderwijs gaven zowel bij rekenkundige als bij algebraïsche vraagstukken de hoogste score aan de algebraïsche oplossing. De meerderheid van hen zag algebra als de enige algemene en 'echt wiskundige' methode voor het oplossen van vraagstukken. Ze beschouwden rekenkundige methoden vaak als minderwaardig of zelfs afkeurenswaardig, en zeker niet als een wiskundige manier van probleemoplossen. Bij kandidaat-leerkrachten basisonderwijs was de evaluatie afhankelijk van het soort vraagstuk: het hoogst voor 'getallen genereren' bij een rekenkundig vraagstuk, het hoogst voor de algebraïsche oplossing bij een algebravraagstuk. Deze toekomstige leerkrachten basisonderwijs apprecieerden de efficiëntie van een oplossingsmethode en 'slimme methoden' voor het oplossen van complexe vraagstukken. Verschillende studenten onder hen begrepen de algebraïsche oplossingswijze onvoldoende, waardoor ze deze minder hoog evalueerden.
- Wat de vooropleiding betreft, volgden studenten van de lerarenopleiding secundair onderwijs gemiddeld een veel sterker pakket wiskunde in het secundair onderwijs dan studenten van de lerarenopleiding basisonderwijs. Hoe meer uren wiskunde een aspirant-leerkracht volgde, hoe beter zijn of haar prestaties op de algebravraagstukken en hoe meer algebra hij of zij gebruikte bij het oplossen van alle vraagstukken. Het volgen van een sterker pakket wiskunde hing positief samen met de score die men gaf aan algebraïsche oplossingen, en negatief met de waardering voor rekenkundige oplossingen.

2.2.3 Wat kan er gedaan worden aan rekenproblemen?

2.2.3.1 Leerlijn rekenen – algebra

Verschillende bronnen geven aan dat er gewerkt moet worden aan een goede leerlijn van rekenen naar algebra.

2.2.3.1.1 Rapport Waalse onderwijsinspectie: spiraalvorm

De onderwijsinspectie van de Waalse gemeenschap pleit in haar rapport voor een spiraalvorm in het wiskundeonderwijs: verschillende wiskundeconcepten moeten door de jaren heen verrijkt en progressief geabstraheerd worden. De inspectie pleit ervoor om, voor de essentiële procedures en concepten, te omschrijven wat op elk moment van de schoolloopbaan verwacht wordt, o.a. qua niveau van abstractie en automatisering. Op dit moment heeft wiskunde in Wallonië ook een selectiefunctie. Een geleidelijkere opbouw kan volgens de inspectie van wiskunde terug een instrument van emancipatie maken dat het kan en moet zijn.

2.2.3.1.2 Verder gaan in het basisonderwijs

Dekker en Dolk (2006) pleiten voor een doorgaande leerlijn rekenen. Volgens hen zijn opgaven in het Nederlandse basisonderwijs gericht op het oefenen en onderhouden van rekenalgoritmes. In het voortgezet onderwijs wordt er meer naar inzicht gevraagd, zeker voor sterkere leerlingen (vb andere talstelsels; verschillende vormen van breuken; interpreteren van antwoorden; beoordelen of een ZRM nuttig is bij een berekening). Het basisonderwijs zou aanzetten kunnen geven tot algebraïsch denken. Door niet enkel te werken met getalsystemen, maar er ook over te redeneren, kan deze overgang gemakkelijker worden. Dekker en Dolk zien mogelijkheden bij bijvoorbeeld het thema 'negatieve getallen'.

2.2.3.1.3 Nederland: werken met referentieniveaus

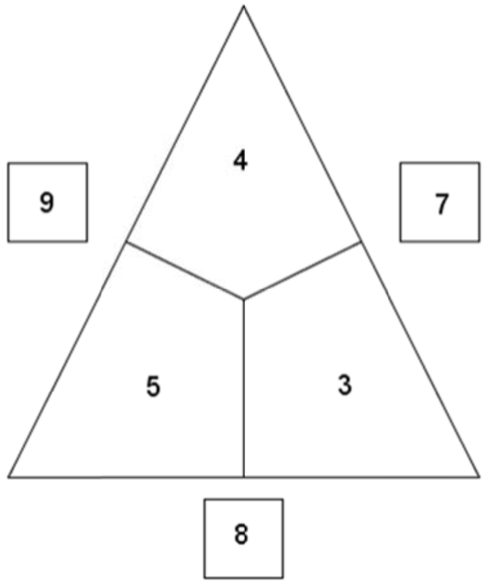
Het Nederlandse rapport van de ' Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen' (Meijerink, 2008) geeft aan wat leerlingen voor taal en rekenen moeten beheersen om goed voorbereid te zijn op de volgende fase in hun schoolloopbaan en op behoorlijk functioneren in de maatschappij. Door de basiskennis en de basisvaardigheden vast te stellen, willen de Nederlandse beleidslieden twee doelen bereiken: een samenhangend curriculum voor (taal en) rekenen omschrijven, binnen en over onderwijssectoren heen en het verbeteren van de (taal- en) rekenvaardigheden van de leerlingen.

Bij de omschrijving van dat curriculum wordt er gewerkt met referentieniveaus. Ze geven zicht op gewenste kennis en vaardigheden voor rekenen en de opbouw daarvan. Elk referentieniveau is nog eens opgesplitst in twee kwaliteiten: een fundamentele kwaliteit (F) en een streefkwaliteit (S). De fundamentele kwaliteit moet door alle leerlingen behaald worden. De streefkwaliteit is er voor leerlingen die meer aankunnen. Momenteel worden opgaven van het referentieniveau 1F op het einde van het basisonderwijs niet goed opgelost door 25% van de leerlingen. 35% van de Nederlandse leerlingen komt in het secundair onderwijs terecht in de kadergerichte en beroepsgerichte leerwegen (vmbo bb en kb); deze leerwegen zijn min of meer vergelijkbaar met de Vlaamse B-stroom. De ambitie is om zoveel mogelijk van deze leerlingen tot dit minimale basisniveau te krijgen. De helft van de leerlingen haalt het streefniveau 1S op het einde van het basisonderwijs. Dit percentage zou moeten toenemen tot 65%, omdat 65% van de leerlingen naar de academische (havo – vwo) of theoretische leerwegen (vmbo t) doorstroomt (deze leerwegen zijn min of meer vergelijkbaar met de A-stroom) doorstroomt. Vanaf 12 jaar worden de doelen voor leerlingen erg gedifferentieerd. In de aanbevelingen staat ook expliciet dat eerder verworven kennis en vaardigheden systematisch onderhouden moeten worden.

2.2.3.1.4 Modellen uit het basisonderwijs meenemen naar het secundair onderwijs

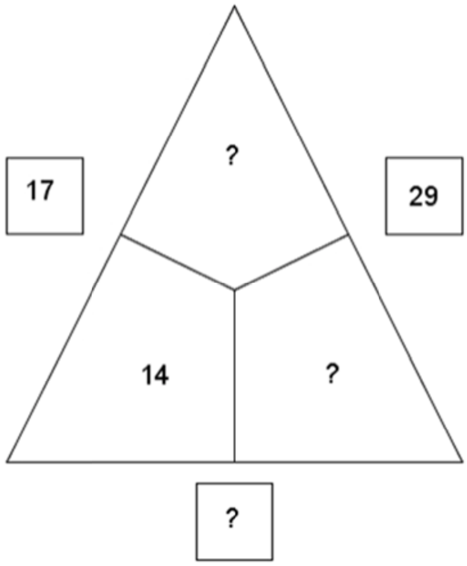
Van Dooren (2010) pleit voor het gebruik van verschillende modellen om de betekenis van bewerkingen te illustreren en te verbreden. Leerlingen moeten op jonge leeftijd, reeds in het basisonderwijs, hiermee kennismaken. In het secundair onderwijs kunnen deze modellen dan gebruikt worden om abstracter rekenwerk te ondersteunen. Van Dooren denkt hierbij onder andere aan oppervlaktemodellen bij de vermenigvuldiging. Ook het Nederlandse rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (Meijerink, 2008) pleit voor het gebruik van modellen die door de verschillende leerjaren heen gebruikt kunnen worden voor verschillende onderwerpen.

In Duitsland (Wittmann,2005; Op de Beeck en Willems,2009) wordt bijvoorbeeld gewerkt met 'arithmogons' (in sommige bronnen ook aangegeven als 'arithmagons'): driehoeken die opgesplitst zijn in drie gebieden. In elk gebied van de driehoek moet één getal staan. Aan de buitenkant van de driehoek staan vierkantjes waarin ook getallen kunnen geschreven worden. Een driehoek (arithmogon) is correct ingevuld als elk getal aan een buitenzijde de som is van de getallen in de aanpalende gebieden. De onderstaande driehoek is bijvoorbeeld correct ingevuld.

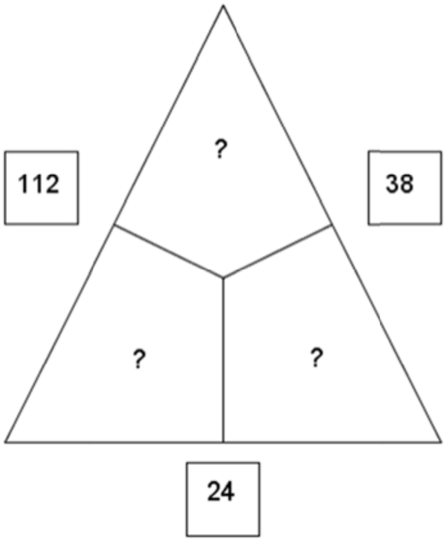


Reeds in het eerste leerjaar van de lagere school maken leerlingen oefeningen waarbij de drie getallen binnenin de driehoek gegeven zijn en ze zelf door optelling de uitkomsten aan de buitenkant moeten vinden. In de latere leerjaren komen dergelijke oefeningen terug, maar dan met grotere getallen.

Vanaf het tweede leerjaar worden er variaties aangeboden waarbij er ook getallen buiten de driehoek gegeven zijn. Leerlingen moeten dan ook getallen kunnen aftrekken om dergelijke driehoeken op te lossen.



Moeilijkere arithmogons zijn die waarbij enkel de getallen aan de buitenkant van de driehoek gegeven zijn:



In de eerste graad van de lagere school proberen leerlingen zulke oefeningen (met eenvoudigere getallen) op te lossen door min of meer systematisch de getallen binnenin te variëren. In het vierde leerjaar ontdekken leerlingen onder begeleiding enkele patronen:

- De som van alle getallen aan de buitenkant (*buitensom*) is het dubbel van de som van alle getallen binnenin de driehoek (*binnensom*). Dit komt doordat elk getal in de driehoek twee keer gebruikt wordt om een buitengetal te berekenen. De binnensom in het voorbeeld hierboven is dus 87.
- Als een getal dat buiten de driehoek staat afgetrokken wordt van de binnensom, is het resultaat het overstaande getal binnenin de driehoek. Tegenover 24 moet dus 63 staan.
- Met deze twee principes kunnen leerlingen alle driehoeken oplossen.

In het secundair onderwijs worden arithmogons opgelost door te werken met vergelijkingen. Het werk in de vroegere jaren, waarbij getallen systematisch gevarieerd werden, is een serieuze hulp bij het opstellen van de juiste vergelijkingen.

2.2.3.1.5 Overgangen expliciteren

Van Dooren pleit er voor om overgangen bij het rekenen expliciet te maken. Bijvoorbeeld: als een positief getal vermenigvuldigd wordt met een natuurlijk getal (verschillend van 0), is de uitkomst altijd groter dan het oorspronkelijke getal. Dit is het geval bij (bijna) alle rekenopgaven die leerlingen in het begin van het lager onderwijs oplossen. Leerlingen beschouwen 'vermenigvuldigen' dan ook vaak als 'groter maken'. Bij een vermenigvuldiging met breuken of negatieve getallen is dit echter niet automatisch meer zo. Dat moet expliciet aan de leerlingen verteld worden, volgens Van Dooren. Ook Vlassis (2004) wijst er op dat leren omgaan met het minteken een proces van lange adem is. Om hierin te groeien hebben leerlingen een gevarieerd aanbod van oefeningen en ondersteuning nodig in een voor hen begrijpbare, al dan niet formele taal.

2.2.3.2 Het gebruik van ICT

In deze paragraaf worden enkele mogelijkheden besproken die het gebruik van ICT biedt bij het werken rond algebraïsche technieken. De bijdrage van Roelens verder in dit hoofdstuk concretiseert deze mogelijkheden.

2.2.3.2.1 ICT als ondersteuning bij ontwikkelen van inzicht en vaardigheid

Het gebruik van ICT – hulpmiddelen wordt door onder andere van de Craats (2008) in twijfel getrokken. De achterliggende gedachte is dat leerlingen eerst algebraïsche technieken met de hand moeten kunnen uitvoeren alvorens ICT te kunnen gebruiken. Nochtans biedt ICT, volgens Drijvers en van Reeuwijk

(2006), mogelijkheden voor het ontwikkelen van inzicht en het oefenen van vaardigheden. Zij omschrijven een aantal manieren waarop ICT bij algebra kan functioneren.

Bij de ontwikkeling van inzicht en vaardigheid kan ICT gebruikt worden als modelomgeving. De leerling kan in die modelomgeving verschillende situaties onderzoeken, los van concrete context. Het programmaatje 'Geometrische algebra 2D' (uit www.wisweb.nl) bijvoorbeeld gebruikt het rechthoeksmodel om het vermenigvuldigen van veeltermen te leren kennen en gebruiken. Kieran en Yerushalmy (2004) omschrijven andere omgevingen voor gestructureerd symbolisch rekenen, bijvoorbeeld *l'algebrista*. Werken met deze ICT- omgeving kan het begrip 'gelijkwaardigheid' bij het oplossen van vergelijkingen bijvoorbeeld verduidelijken.

2.2.3.2.2 ICT als oefenomgeving

Een ICT-omgeving kan ook een hulpmiddel zijn in het oefenen van vaardigheden. Als leerlingen in een ICT-omgeving vaardigheden inoefenen, krijgen ze direct feedback op hun oplossingen (juist/fout?) en hun strategieën (Welke stap is juist? Waar zit de fout?). Er zijn differentiatiemogelijkheden, doordat iedere leerling in eigen tempo kan doorwerken en de leerkracht de kans krijgt om zich te richten op de minder sterke leerlingen. Voorgeprogrammeerde programma's, ook wel applets genoemd, als 'vergelijkingen oplossen' en 'geometrische algebra opdrachten' zijn hier voorbeelden van. Bij die laatste applet gaan het verwerven van een model en het oefenen van vaardigheden hand in hand. Dat is ook het geval bij de applet 'vergelijkingen oplossen met weegschaal', waarbij leerlingen op verschillende niveaus oefeningen kunnen oplossen. Die niveaus omschrijven een leerlijn, waarbij het accent verschuift van de ontwikkeling van een denkmodel naar het oefenen van de oplossingsmethode.

2.2.3.2.3 ICT ten koste van handmatig rekenen?

Het werken met pen en papier mag daarbij niet uit het oog verloren worden. Volgens Drijvers en van Reeuwijk (2006) leidt het gebruik van goede applets tot een betere begripsontwikkeling bij leerlingen. Die betere begripsontwikkeling heeft ook een positief effect op de vaardigheden met pen en papier. Het toepassen van een ICT-methode legt soms ook andere accenten dan het werken met pen en papier.

Ander onderzoek wijst uit dat leerlingen die met ICT werken, minder vakkundig zijn in handmatige manipulatie dan leerlingen die dat meer geleerd hebben. Ze hebben echter alternatieve methoden ontwikkkeld, zoals ook blijkt uit het onderzoek van Kieran en Sfard (in Kieran en Yerushalmy, 2004) bij leerlingen van 13 jaar. Deze leerlingen lossen vergelijkingen zoals 7x+4=5x+8 op door grafieken te tekenen.

2.2.3.3 Verstandig inoefenen

2.2.3.3.1 Routine of inzicht?

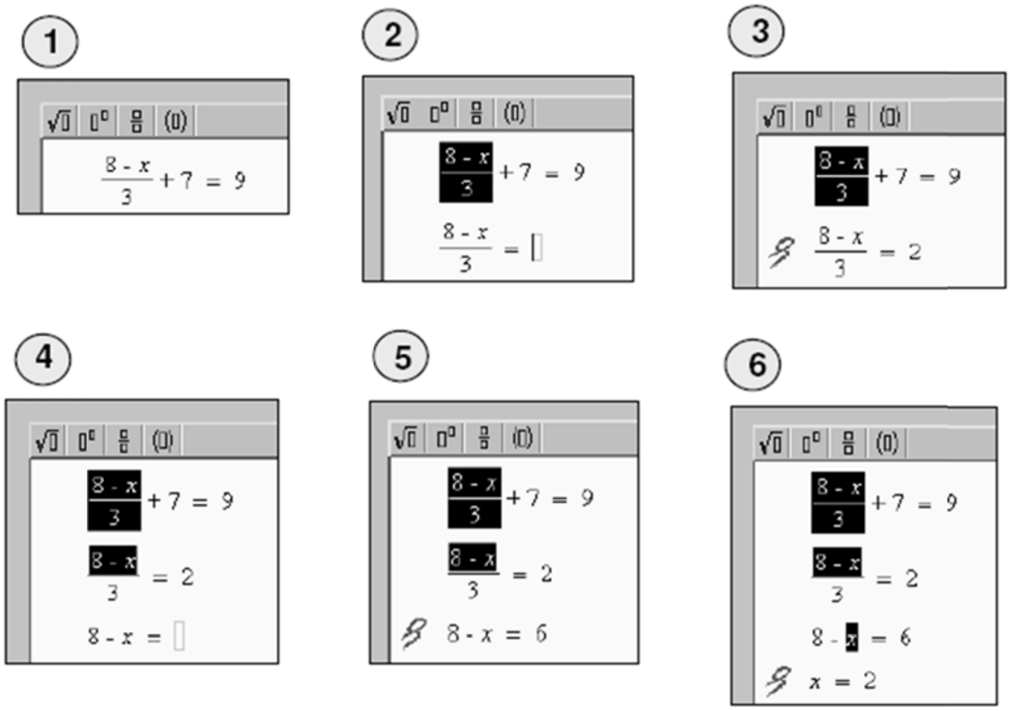
Volgens van de Craats en Verhoef (2009) is drillen of routinematig werken de beste manier om iets aan rekenproblemen te doen. Freudenthal beweerde dat drillen de groei van inzicht tegengaat. In *Adding it Up* (in Meijerink, 2008), een publicatie van de National Research Council van de USA, drukken Amerikaanse topwetenschappers uit wiskunde, psychologie, wiskundedidactiek en onderwijskunde hun visie op het verband tussen routine en inzicht uit in de volgende 4 punten:

- Ten onrechte wordt vaardigheid tegenover inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker beheersingsniveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methode met begrip te leren en ontwikkelen.
- Zonder een goede routine stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem of het zoeken naar onderliggende relaties.
- Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren, hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen, dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en ze in samenhang met andere operaties te zien.
- Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde blokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan

kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moet leren.

2.2.3.3.2 Hoe verstandig inoefenen?

Kindt (2006) geeft suggesties om leerlingen productief te laten oefenen. Hij verstaat hieronder een manier van oefenen waarbij elke stap iets inzichtelijks toevoegt. Oefenen en denken gaan hand in hand. Voor het rekenen met veeltermen en het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad suggereert hij onder andere om te werken met 'omkeervragen'. Dit zijn vragen waarvan de uitkomst gekend is, zoals 'vul passende veelvouden van x en y in: (…+…) + (…+…)=12x+5y'. Een andere suggestie van Kindt is om te werken met de 'bordjesmethode'. Hierbij wordt een stuk van een algebraïsche vergelijking bedekt, zodat de structuur duidelijker wordt. In Figuur 4.2 wordt aangeduid hoe de vergelijking $\frac{8-x}{3}+7=9$ wordt opgelost met de bordjesmethode (uit www.wisweb.nl).



Figuur 4.2 Voorbeeld van de bordjesmethode

Kindt pleit in de eerste 2 jaar van het theoretische secundaire onderwijs (havo/vwo) ook voor veel aandacht voor de rekenkundige kant van algebra en om de vermenging van negatieve getallen met algebra, omwille van het abstracte karakter en de complicaties die dat geeft voor leerlingen, even uit te stellen.

2.2.3.4 Inzichten van leraren verdiepen

Van Dooren, Verschaffel en Onghena (2001) zien mogelijke verbeteringen bij (toekomstige) leraars. Op basis van hun onderzoek komen ze tot een aantal vragen: Kan de groep van onderwijzers, die helemaal geen affiniteit met algebra heeft, de leerlingen op het einde van het basisonderwijs op gepaste wijze voorbereiden op de overgang naar een algebraïsche oplossingswijze? Kunnen regenten inspelen op de rekenkundige concepten en gewoonten die leerlingen hanteren als ze pas uit de basisschool komen? Kunnen regenten deze leerlingen de noodzaak en validiteit van de algebraïsche oplossingswijze doen erkennen? Kunnen ze leerlingen leren om op flexibele wijze gebruik te maken van zowel rekenkundige als algebraïsche oplossingsvaardigheden, afhankelijk van de complexiteit van het probleem ('adaptive expertise')? Of leren zij leerlingen aan om steeds naar algebraïsche oplossingsmethoden te grijpen ('routine expertise')? Op het vlak van opleiding van (toekomstige) leraars zien zij dus verbetermogelijkheden.

2.2.4 Is algebraïsch rekenen belangrijk voor alle leerlingen?

2.2.4.1 Visie van Maarten Kindt

Kindt (2006) geeft een aantal argumenten waarom algebraïsche vaardigheden belangrijk zijn voor leerlingen. Kennis van de grammatica van de algebrataal is belangrijk om opgaven te lezen en gegevens in te voeren in een rekenmachine. Volgens hem is de beheersing van vaardigheden een noodzakelijke voorwaarde tot niveauverhoging. Zonder vaardigheid kan er geen inzicht tot stand komen en zonder inzicht is er geen vaardigheid mogelijk. Goede vaardigheid in rekenen en elementaire algebra heeft praktisch nut en schept ruimte om productief wiskunde te bedrijven.

2.2.4.2 Algebra en gelijke kansen

Stacey en Chick (2004) omschrijven verschillende problemen in algebraonderwijs. Algebra aanleren aan een groot deel van de bevolking leidt tot vragen over relevantie en gelijkheid. Algebra geïnterpreteerd als ‘manipuleren van symbolen’ is weinig relevant voor het dagelijkse leven, maar dient eerder als een selectiemiddel voor wiskundig sterkere leerlingen. De uitdaging in het onderwijs moet dan ook zijn om algebra relevant te maken voor alle leerlingen. Dit kan door aandacht te hebben voor de objecten en processen van algebra en door meer belang te hechten aan andere aspecten van algebra dan het symbolisch manipuleren. Want algebra blijft belangrijk: het is de poort naar de hogere wiskunde, en volgens Stacey en Chick moeten alle leerlingen de kans krijgen om hiermee kennis te maken, om algebra te leren. Dit vereist een aanpak die inspeelt op de sterke kanten van de verschillende leerlingen.

2.2.4.3 Belang van algebraïsch rekenen in het ICT-tijdperk

Door het gebruik van technische (hulp)middelen verandert de algebra. Volgens Stacey en Chick (2004) moet het algebracurriculum hierop inspelen. Technologische vooruitgang geeft mogelijkheden om een ongewijzigd curriculum beter aan te leren, met meer resultaat voor de leerlingen. Drijvers en van Reeuwijk (2006) geven aan dat de leerling bij het werken met ICT binnen algebra een andere rol speelt, eerder die van ‘opzichter’ dan van ‘uitvoerder’. Omdat het niet goed mogelijk is de rol van opzichter te spelen zonder ervaring als uitvoerder, blijft enige vaardigheid met pen en papier nodig. De uitdaging is om aan te geven wat leerlingen nu precies met de hand moeten kunnen en wat niet.

2.2.4.4 Een ruimere kijk op algebra

Volgens Kieran (2004) bestaat de kern van algebra uit drie verschillende activiteiten.

De eerste activiteit is het generaliseren. Hierbij worden de uitdrukkingen en de gelijkheden die de objecten van algebra uitmaken, gevormd. De onderliggende objecten waarvan deze activiteit gebruik maakt zijn de variabelen en onbekenden. Binnen deze activiteit kan algebra vanuit twee raamwerken betekenis krijgen: vanuit de ‘functies’ (grafische voorstellingen en tabellen geven betekenis aan symbolische uitdrukkingen, focus op variabele, vergelijking van de eerste graad wordt geïnterpreteerd als een gelijkheid van twee functies, de oplossing is de x-waarde van het snijpunt; gebruik van ICT) of vanuit de ‘veralgemeende rekenkunde’ (met focus op voorstellingen van numerieke processen).

Een tweede activiteit is de transformerende. Het is de algebra van de regels. De kracht van de algebra komt hier goed tot uiting: het gaat om algoritmen uitvoeren, zonder na te denken.

Verder is algebra een globale activiteit op meta – niveau. Het gaat hier om probleemoplossen, modelleren, verandering bestuderen, bewijzen. Algebra is bij deze activiteit een gebruiksinstrument.

Volgens Kieran (2004) zijn er in het verleden verschillende aspecten van algebra beklemtoond. Voordeel van de klemtoon op transformerende algebra is dat leerlingen door regels te volgen, los van betekenis, problemen kunnen oplossen. Het nadeel is dat dit weinig betekenisvol is voor leerlingen en tot weinig resultaat leidde. De generaliserende activiteit beklemtonen leidde in de jaren ‘90 tot de hoop dat het goed begrijpen van algebra automatisch leidt tot goed technisch rekenwerk. Dat blijkt niet te kloppen. Volgens Kieran moeten generaliserende en transformerende activiteiten dan ook hand in hand gaan.

3 Bronnen

Dekker, T. en Dolk, M. (2006). Van rekenen naar algebra. In P. Drijvers (Red.), *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 25-39). Utrecht: Freudenthal Instituut

Drijvers, P., Goddijn, A. en Kindt M. (2006). Oriëntatie op schoolalgebra. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school (*pp. 7-23). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P., van Reeuwijk, M. (2006). Algebra en ICT. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 137-159) Utrecht: Freudenthal Instituut.

Gielen, S., Willem, L., De Meyst, M., Beringhs, S., Crynen, M., Luyten, B. en Janssen, R. (2010). *Peiling wiskunde in het basisonderwijs. Eindrapport.* Leuven: K.U.Leuven, Centrum voor Onderwijseffectiviteit en –evaluatie.

Gielen, S., Van Dessel, K., De Meyst, M., Beringhs, S., Crynen, M., Luyten, B. en Janssen, R. (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad van het secundair onderwijs (A-stroom) - Eindrapport.* Leuven: K.U.Leuven, Centrum voor Onderwijseffectiviteit en –evaluatie.

GO! (1998). *Leerplan gewoon basisonderwijs, wiskunde*. Brussel: GO! Raadpleegbaar op: http://www.gemeenschapsonderwijs.be/sites/portaal_nieuw/Basisonderwijs/

Godet, R. (2010). *Rapport établi par le Service general de l'inspection au terme de l'année scolaire 2009-2010*. Brussel,Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, Service general de l'inspection; Raadpleegbaar op: www.enseignement.be/download.php?do_id=7921&do_check

Harskamp, E. (2008). Reken-wiskunderesultaten van leerlingen aan het einde van de basisschool. In Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen. Onderdeel van de eindrapportage van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen* (pp. 95-106). Enschede. Raadpleegbaar op: http://www.taalenrekenen.nl/referentiekader/rel_doc/downloads/Rekenrapport.pdf/

Herscovics, N., Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between Arithmetic and Algebra, *Educational Studies in Mathematics, 27(1)*, 59-78

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer Academic publishers, The University of Melbourne, Australië.

Kieran, C. en Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technological Environments in Algebra Learning and Teaching. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 99-152). Kluwer Academic publishers, The University of Melbourne, Australië, 99-152

Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra, een bundel ideeën.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kindt, M. (2006). Oefening baart kunst. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school (*pp. 105-136.) Utrecht: Freudenthal Instituut.

Martio, O. (2009). Long term effects in learning mathematics in Finland – curriculum changes and calculators. *The teaching of Mathematics*, *12*, 51-56; Raadpleegbaar op: *http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/23/tm1221.pdf*

Meijerink, H. (2008). *Over de drempels met taal en rekenen. Hoofdrapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en rekenen.* Enschede. Raadpleegbaar op: http://www.slo.nl/nieuws/dll/

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (B-stroom)*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (A-stroom)*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Op de Beeck, R. en Willems, J (2010), Patronen leren herkennen in de eerste en tweede graad, *Uitwiskeling* 26(1)

Schmidt, S. (1994). *Passage de l' arithmétique à l' algèbre et inversement de l' algèbre à l' arithmétique, chez les futures enseignants dans un contexte de résolution de problèmes.* Montréal, Canada: Université de Québec (ongepubliceerde licentiaatsverhandeling).

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue de Sciences de l' Education*, *22(2)*, 277-294.

Schmidt, S. en Bednarz, N.(1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 127-155.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives, *Journal of mathematical behaviour*, *14,* 15-39; Raadpleegbaar op: http://www.math.harvard.edu/~engelwar/MathE599/Sfard,%20Development%20of%20Algebra.pdf

Stacey, K. en Chick, H. (2004). Solving the Problem with Algebra. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Kluwer Academic publishers, The University of Melbourne, Australië.

Standaert, R. (2007). *Vergelijken van onderwijssystemen.* Leuven: Acco.

van de Craats, J. (2008), *De grafische rekenmachine op school.* Raadpleegbaar op http://staff.science.uva.nl/~craats/nieuwsbriefJvdC.pdf

van de Craats, J. en Verhoef, G. (2009). Wat is er mis met ons rekenonderwijs? *Mensenkinderen*, *24(5)*, 7-9; Raadpleegbaar op http://staff.science.uva.nl/~craats/Rekenen_JvdC_GV.pdf

Van den Broeck, A., Van Damme, J., Brusselmans-Delhairs, C. en Valcke, M. (2004). *Vlaanderen in TIMSS 2003.* Brussel: Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap. Raadpleegbaar op http://www.ond.vlaanderen.be/onderwijsstatistieken/2003-2004/Vlaanderen-timss-2003.pdf

van der Schoot, F. (2008) *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPON*. Arnhem: Cito.

Van Dooren, W., (2010) *Bespreking peilingsresultaten wiskunde.* Leuven, persoonlijke communicatie op 1 december 2010.

Van Dooren, W., Verschaffel, L. en Onghena, P. (2004), Rekenen of Algebra? Voorkeuren van toekomstige leerkrachten voor rekenkundige of algebraïsche werkwijzen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 19(4), 16-29 Raadpleegbaar op: http://www.sip.be/dpb/wis/dagwiskunde2004/Drukproef.pdf

Van Dooren, W., Verschaffel, L. en Onghena, P. (2001). *Rekenen of Algebra? gebruik van en houding tegenover rekenkundige en algebraïsche oplossingswijzen bij toekomstige leerkrachten* (Studia Paedagogica 30). Leuven: Universitaire Pers Leuven

Van Nijlen, D., Janssen, R., Crauwels, M., Janssens D., Rijmenans, R. Verschaffel, L. (2006). *TIMSS en PISA in relatie tot de Vlaamse eindtermen. Eindrapport.* Leuven: Katholieke Universiteit Leuven.

Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming (2009). Conferentie na de p*eiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (B-stroom)*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction*, *14,* 469-484; Raadpleegbaar op http://www.cs.phs.uoa.gr/en/links/PM30/3.Vlassis.pdf

Willem, L., Janssen, R., Luyten, B. (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad van het secundair onderwijs B-stroom - Eindrapport*. Leuven: K.U.Leuven, Centrum voor Onderwijseffectiviteit en -evaluatie.

Wittmann, E. (2005), *Mathematics as the Science of Patterns – A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood*, plenaire lezing gepresenteerd op het International Colloquium “Mathematical learning from childhood to adulthood”, Bergen, juli 2005

Websites:

Informatie over TIMSS 2003 in het internationale rapport http://timss.bc.edu/timss2003.html

Website Voortgezet Onderwijs Cohort Leerlingen, Raadpleegbaar op http://www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOP_5T8M6T

WisWeb is een Nederlandse website voor leerlingen en docenten wiskunde uit het voortgezet onderwijs. Raadpleegbaar op www.wisweb.nl

4 Reflectie over de resultaten door andere onderwijspartners

4.1 Hoofdrekenen: breek er je hoofd niet over. Bruno Sagaert, OVSG

4.1.1 Inleidend

Elk schooljaar organiseert OVSG, als koepel en begeleidingsdienst van het gemeentelijk/stedelijk onderwijs een toets voor de leerlingen van het zesde leerjaar voor alle leergebieden. Telkens wordt er een leergebied of leerdomein in de focus geplaatst. Tijdens het schooljaar 2009-2010 werd dit ‘hoofdrekenen’.

Dit artikel beperkt zich tot de vaststellingen van één onderzoeksonderdeel en de belangrijkste onderwijsprincipes bij het precieze hoofdrekenen.

4.1.2 Onderzoeksopzet

Om hoofdrekenen in kaart te brengen, voerden we drie onderzoeken uit. Bij elk onderzoek formuleerden we een aantal onderzoeksvragen.

4.1.2.1 Onderzoek 1: een bevraging bij leraren kleuteronderwijs m.b.t. ontluikende gecijferdheid

- Hoe ziet het wiskundig aanbod er uit in de kleuterschool?
- Is er interactie tussen kleuterleraar en kleuters en tussen kleuters onderling in de wiskundige activiteiten?
- Welke getalbeelden worden er gebruikt, hoe worden ze gebruikt en zijn er afspraken m.b.t. het gebruik van de getalbeelden?
- Hoe wordt er gedifferentieerd tijdens wiskundige activiteiten?
- Zijn er inhoudelijke en vakdidactische afspraken m.b.t. het wiskundig aanbod om de continue ontwikkelingslijn en de verticale samenhang te waarborgen?
- Hoe worden in de kleuterschool wiskundige activiteiten geëvalueerd?

4.1.2.2 Onderzoek 2: een bevraging bij leraren lager onderwijs m.b.t. hun hoofdrekenonderwijs

- Welk belang hechten leraren aan hoofdrekenonderwijs?
- In welke mate zijn onderwijsprincipes bij het hoofdrekenonderwijs geïntegreerd in de hoofdrekenonderwijspraktijk in de lagere school?
    - keuzemogelijkheden in strategiegebruik aanbieden;
    - organisatie van verschillende hoofdrekenactiviteiten;
    - opbouw van de lessen;
    - goede krachtige instructie;

- wegen naar verinnerlijkt handelen en verwoorden;
- gebruik van krachtige denkmodellen;
- inzichtelijk onderbouwen van hoofdrekenstrategieën;
- het noteren van tussenuitkomsten;
- interactie en reflectie in de hoofdrekenlessen;
- plezier in hoofdrekenactiviteiten en –spelletjes;
- differentiëren in de hoofdrekenlessen;
- toetsgegevens verklaren.

4.1.2.3 Onderzoek 3: vanuit de OVSG-toets 2010 wilden we nagaan hoe leerlingen op het einde van de basisschool hoofdrekenen

- Hanteren leerlingen een standaardprocedure om hoofdrekenopgaven op te lossen?
- Hanteren leerlingen flexibele hoofdrekenprocedures waar dit is aangewezen op basis van:
  - relatie tussen getallen, bv. 50 x 344 = (100 x 344) : 2;
  - inzicht in de structuur van de getallen, bv. 365 + 197 = 365 + (200 – 3) = 565 – 3 = 562 (aanvullen);
  - eigenschappen van bewerkingen (commutativiteit (wisselen), associativiteit (schakelen), distributiviteit…);
  - toepassen van wiskundige aspecten, bv. 865 + 398 = (865 – 2) + (398 + 2) = 863 + 400 = 1 263;
  - flexibel hanteren tafelkennis/ontbinden in factoren/verdubbelen en halveren, bv. 8 x 44 = (2 x 2 x 2) x 44 / 288 : 8 = (288 : 2) : 2 : 2 = 144 : 2 : 2 = 72 : 2 = 36.
- Gebruiken leerlingen visuele hulpmiddelen? Welke? Bv. lege getallenlijn.
- Wat kunnen leerlingen m.b.t. hoofdrekenen goed?
- Welke hoofdrekenprocedures leiden tot correcte resultaten?
- Is er een correlatie tussen bepaalde hoofdrekenprocedures en correcte resultaten? En welke hoofdrekenprocedures leiden dan eerder tot een correct resultaat en welke niet?
- Waarop maken leerlingen veel fouten?
- Welke fouten maken die leerlingen dan?
  - niet oplossen van de opgave;
  - geen tussenuitkomsten schrijven;
  - fout in een goed gekozen hoofdrekenprocedure;
  - keuze van een verkeerde procedure;
  - nauwkeurigheids-, aandachtsfout, fout overschrijven van tussenuitkomsten, optellen i.p.v. aftrekken...

We deden dit aan de hand van een dubbelonderzoek:

a) een kwantitatieve analyse van de 15 opdrachten op de toets hoofdrekenen 2010 uitgevoerd in 11 scholen in Vlaanderen en het Brussels Hoofdstedelijk Gewest bij 490 leerlingen;

b) een kwalitatieve analyse van 10 geselecteerde opdrachten van de toets hoofdrekenen 2010 uitgevoerd in dezelfde scholen en bij 292 leerlingen.

In dit artikel gaan we dieper in op de resultaten van onderzoek 3.

4.1.3 Algemene vaststellingen uit het onderzoek inzake hoofdrekenonderwijs

Alhoewel de 292 leerlingen die deel uitmaakten van de kwalitatieve analyse uitdrukkelijk werd gevraagd om **tussenuitkomsten** te noteren, stellen we vast dat gemiddeld 30% van de leerlingen dit niet doet. Ongeveer 1/4 van de groep leerlingen die geen tussenuitkomsten noteert, geeft een foutief antwoord. Zijn onze leerlingen het niet gewoon om bij hoofdrekenen tussenuitkomsten te noteren? Wordt die mogelijkheid in ons hoofdrekenonderwijs aangeboden – geëist – verboden? Nodigen sommige vragen hier niet tot uit? We verwijzen hierbij graag naar het PPON-onderzoek in Nederland 2004.

Iets meer dan de helft van de leerlingen hanteert **standaardprocedures** bij het oplossen van de opgaven. In 84% van de gevallen leidt dit tot een correct antwoord. Toch komt 16% van de leerlingen die een standaardprocedure hanteert niet tot de juiste oplossing.

Bij een aantal vragen vinden we misschien een verband tussen bepaalde **hoofdrekenprocedures** die vlugger leiden tot een correct of foutief resultaat.

Een aantal opmerkelijke vaststellingen m.b.t. het hanteren van procedures bij de 292 geanalyseerde toetsen:

vraag 4 (1 000 000 – 100 100 =):

- bijna 3/4 van de leerlingen splitst de aftrekker om dit op te lossen. Opmerkelijk dat slechts 67% van deze leerlingen een correct antwoord formuleert.

vraag 5 (3/4 – 0,5 =):

- 151 leerlingen zetten de breuk om naar een kommagetal en trekken dan af. Dit leidt bij bijna 94% van deze leerlingen tot een correct antwoord;
- 71 leerlingen zetten het kommagetal om naar een breuk, maken gelijknamig en rekenen uit. Het hanteren van deze procedure leidt 'slechts' bij 84% van de leerlingen tot een correct antwoord.

vraag 8 (1/4 x 4 =):

- 63 leerlingen passen de commutativiteit toe en in 94% van de gevallen wordt een correct antwoord gegeven;
- 77 leerlingen vervangen de breuk door een kommagetal. Dit leidt bij 83% van hen tot een correct antwoord.

vraag 14 (15 x 49 =):

- 102 leerlingen lossen deze vraag op door de vermenigvuldiger te splitsen. Bij 85% van hen leidt dit tot een correct antwoord, bij 15% tot een foutief;
- 53 leerlingen splitsen het vermenigvuldigtal. Bij het hanteren van deze procedure geeft 50% van de leerlingen een correct antwoord en de andere helft een foutief;
- 34 leerlingen lossen dit op door beide factoren te splitsen. Deze procedure leidt slechts bij 15% tot een correct antwoord, 85% komt door deze procedure te hanteren niet tot de correcte oplossing.

Uit dit kleinschalig onderzoek naar het hanteren van procedures stellen we vast dat sommige hoofdrekenprocedures meer kans bieden om tot een correct antwoord te leiden; andere procedures leiden vaker tot fouten. De analyse van vraag 14 is hier een duidelijk voorbeeld van.

Anderzijds zien we ook dat het hanteren van standaardprocedures in de meeste gevallen wel leidt tot een goed antwoord en algemeen hoge scores geeft.

Flexibel rekenen hebben we bijna niet zien toegepast worden. Is het werken met standaardprocedures misschien 'standaard' in ons hoofdrekenonderwijs en besteden we minder aandacht aan flexibele hoofdrekenprocedures?

Ook stellen we vast dat **het gebruik van visuele hulpmiddelen** nagenoeg niet wordt toegepast. Is het gebruik van visuele voorstellingen (getallenlijn, stroken, …) niet echt ingeburgerd? Vinden de leerlingen het moeilijk om hiervan gebruik te maken? Komt dit eerder aan bod in de lagere klassen en zijn ze het inmiddels 'ontgroeid'?

Per vraag zijn er gemiddeld 4 leerlingen van de 292 die **geen oplossing geven**, met als enige uitschieter hierbij vraag 14. Op deze vraag (15 x 49 =) geven 16 leerlingen geen antwoord. Tevens valt op dat per vraag gemiddeld 11 leerlingen van de 292 fouten maakt tegen nauwkeurigheid, foutief overschrijft… Dit is vooral bij vragen 2 en 5, waarbij in beide opgaven een breuk voorkomt. Heeft het te maken met het correct omzetten van breuk naar kommagetal of van kommagetal naar breuk? Hebben we hier voldoende aandacht voor binnen leren leren?

Samengevat kunnen we stellen dat leerlingen zeer vertrouwd zijn met het toepassen van standaardprocedures en dat dit in veel gevallen leidt tot een goed antwoord. Het noteren van tussenuitkomsten kan nog worden aangemoedigd. Visuele hulpmiddelen maken niet echt deel (meer) uit van ons hoofdrekenonderwijs in de derde graad.

4.1.4 Onderwijsprincipes bij het precieze hoofdrekenen[1]

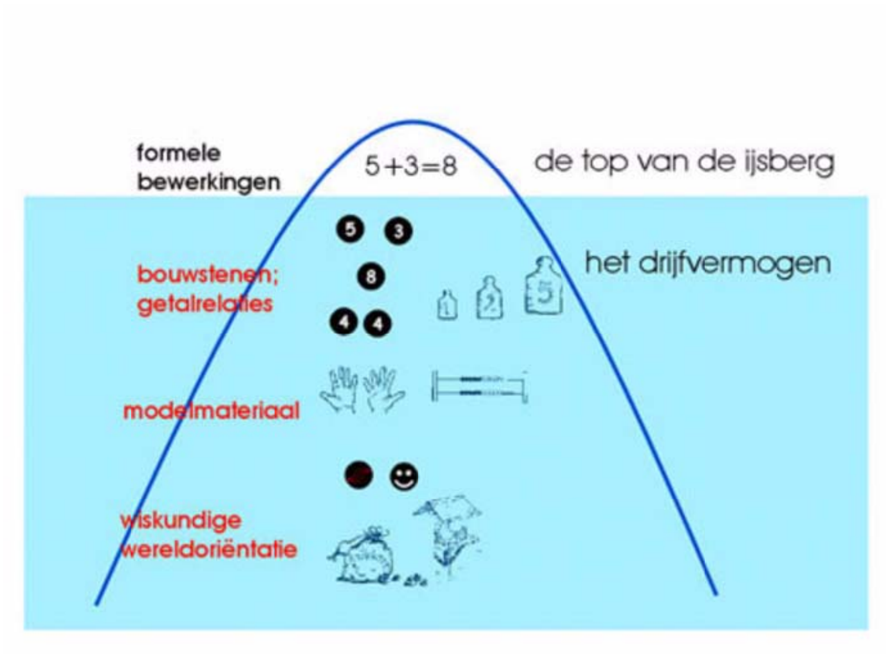
Wat wij - als onderwijsmensen - al lang wisten, wordt in recente literatuur en vanuit wetenschappelijk onderzoek[2] alleen maar bevestigd: de leraar doet ertoe – de leraar maakt een (het) verschil. Daarom presenteren we in dit deel enkele fundamentele onderwijsprincipes om het (hoofd)rekenonderwijs gestalte te geven.

4.1.4.1 Investeer in drijfvermogen

Boswinkel en Moerlands (2001) gebruiken de metafoor van de ijsberg om het belang van een grondige voorbereiding van het formele rekenen te verduidelijken. Wanneer kinderen formeel rekenen (5 + 3 = 8) is dat het topje van de ijsberg. Daaronder gaat echter een veel groter stuk van de ijsberg schuil.[3]

We willen dit uitbreiden naar nagenoeg alle rekenactiviteiten op mentaal niveau. Wat wij zien (en horen), is steeds het resultaat van een reeks onderliggende mentale processen die we niet direct kunnen waarnemen en observeren. Mentale processen die gegroeid zijn uit materiële en schematische handelingen die ondersteund worden door verwoording.

Het is daarom belangrijk dat je als leraar breed investeert in de 9/10 van de ijsberg die onzichtbaar is (het drijfvermogen) maar des te belangrijker is het om het mentale rekenen te ondersteunen.



4.1.4.2 Wegen kenbaar maken en een verantwoorde keuze leren maken

We dienen de leerlingen een waaier van keuzemogelijkheden te laten ontdekken en ervaren. Sommige wegen kun jij zelf als aanvulling aanreiken, indien ze niet door de leerlingen worden ontdekt.

---

[1] Zie OVSG, *Leerplan Wiskunde voor de basisschool.* Brussel, OVSG, 1998, p. 144 – 152 en Deckers M. & Aerts R., *Kinderen rekenen – rekendidactiek voor de lagere school.* Mechelen, Wolters Plantyn Professionele informatie, 2005, p. 17 - 32

[2] Lees o.a. Marzano R.J., *Wat werkt op school – research in actie – meta-analyse van 35 jaar onderwijsresearch direct toepasbaar in beleid en praktijk.* Middelburg, Bazalt, 2007, 160 p. en Pameijer N., van Beukering T., de Lange S., Schulpen Y. & Van de Veire H., *Handelingsgericht werken in de klas – de leerkracht doet ertoe!* Leuven/Den Haag, Acco, 2010, 264 p. en Van Velzen J., *Kennis en denken en leren.* Antwerpen/Apeldoorn, Garant, 2008, 310 p.

[3] Zie o.a. Gelderblom G., *Effectief omgaan met zwakke rekenaars.* Amersfoort, CPS, 2008, p. 33.

en http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/5467.pdf

We onderscheiden o.a. volgende keuzemogelijkheden.[4]

- Relatie tussen getallen
  - 25 % is 25/100 = 1/4 = 0,25
  - 25 % nemen van een getal kan bv. door dit getal te delen door 4.
  - Vermenigvuldigen naar analogie met de maaltafels
    3 x 80 = 3 x 8T = 24T = 240 of 3 x 80 = 3 x 8 x 10 = 240
  - Delen naar analogie met de deeltafels
    420 : 70 = 42T :7T = 6 of 420 : 70 = (420 : 10) : 7 = 6
  - Vermenigvuldigen met 10 / 100 / 1 000
    10 x 145 = 1 450 ➔ 10 x 145 = 145 x 10 = 145 x 1T = 145T = 1 450
    100 x 3,7 = 3 70 ➔ 100 x 3,7 = 3,7 x 100 = 3,7 x 1H = 3,7H = 370
    1 000 x 48 = 4 800 ➔ 1 000 x 48 = 48 x 1 000 = 48 x 1D = 48D = 48 000
  - Delen door 10 / 100 / 1 000
    780 : 10 = 78 ➔ 1T gaat 78 keer in 78T
    2 600 : 100 = 26 ➔ 1H gaat 26 keer in 26H
    32 000 : 1 000 = 32 ➔ 1D gaat 32 keer in 32D
  - Vermenigvuldigen met 5 / 50 / 25
    5 x 34 = (10 x 34) : 2 = 340 : 2 = 170
    50 x 23 = (100 x 23) : 2 = 2 300 : 2 = 1 150
    25 x 8,2 = (100 x 8,2) : 4 = 820 : 4 = 205
  - Delen door 5 / 50 / 25
    130 : 5 = (130 : 10) x 2 = 13 x 2 = 26
    3 400 : 50 = (3 400 : 100) x 2 = 34 x 2 = 68
    600 : 25 = (600 : 100) x 4 = 6 x 4 = 24
  - Bewerkingen met kommagetallen
    5,4 + 0,8 = 54t + 8t = 62t = 6,2
    17,5 – 8,4 = 175t – 84t = 91t = 9,1
    7 x 0,9 = 7 x 9t = 63t = 6,3
    5,4 : 9 = 54t : 9 = 6t = 0,6
  - Vermenigvuldigen met kommagetallen door één factor om te zetten in een breuk
    0,75 x 24 = ¾ x 24 = ¾ van 24 = (24 : 4) x 3 = 6 x 3 = 18
  - Vermenigvuldigen met 0,1 / 0,01 / 0,001
    0,1 x 145 = 145 x 0,1 = 145 x 1t = 145t = 14,5 of 0,1 x 145 = 1/10 x 145 = 1/10 van 145 = 145 : 10 = 14,5
    0,01 x 347 = 347 x 0,01 = 347 x 1h = 347h = 3,47 of 0,01 x 347 = 1/100 x 347 = 1/100 van 347 = 347 : 100 = 3,47
    0,001 x 841 = 841 x 0,001 = 841 x 1d = 841d = 0,841 of 0,001 x 841 = 1/1 000 x 841 = 1/1 000 van 841 = 841 : 1 000 = 0,841
  - Vermenigvuldigen met 0,5 / 0,25
    0,5 x 78 = ½ x 78 = 78 : 2 = 39
    0,25 x 4,8 = ¼ x 4,8 = 4,8 : 4 = 1,2
  - Delen door 0,1 / 0,01 / 0,001
    8 : 0,1 = 8 x 10 = 80 ➔ 1t kan 80 keer in 8.
    8 : 0,01 = 8 x 100 = 800 ➔ 1h kan 800 keer in 8.
    0,68 : 0,001 = 0,68 x 1 000 = 680 ➔ 1d kan 680 keer in 0,68.
  - Delen door 0,5 / 0,25
    3 : 0,5 = 2 x 3 = 6 ➔ 0,5 kan 6 keer in 3.
    2,2 : 0,25 = 4 x 2,2 = 8,8 ➔ 0,25 kan 8 keer in 2 en kan 0,2 keer in 0,2
- Inzicht in de structuur van de getallen
  - Het splitsen van getallen (ook wel rijgen genoemd)
    67 + 16 = 67 + 10 + 6 = 77 + 6 = 83
    484 - 270 = 484 - 200 - 70 = 284 - 70 = 214
    5,4 + 0,8 = 5,4 + 0,6 + 0,2 = 6 + 0,2 = 6,2
    Het splitsen bij vermenigvuldigen en delen is gebaseerd op de distributiviteit (zie lager).

[4] OVSG, *Leerplan Wiskunde voor de basisschool.* Brussel, OVSG, 1998, p.144 – 151 en Carbonez M. e.a., *Wiskundewijzer voor het lager onderwijs*. Wommelgem, Van In, 2008, p. 63 - 72

- Compenseren (werken met 'mooie' getallen)
  365 + 197 = 365 + 200 – 3 = 565 – 3 = 562
  567 – 289 = 567 – 300 + 11 = 267 + 11 = 278
- Ontbinden in factoren
  8 x 34 = 2 x 2 x 2 x 34 = 2 x 34 x 2 x 2 = 68 x 2 x 2 = 136 x 2 = 272 (telkens verdubbelen)
  288 : 8 = 288 : 2 : 2 : 2 = 144 : 2 : 2 = 72 : 2 = 36 (halveren)
  300 : 12 = 300 : 3 : 4 = 100 : 4 = 25 of 300 : 3 : 2 : 2 = 100 : 2 : 2 = 50 : 2 = 25

▪ Toepassen van de eigenschappen van de bewerkingen
- De commutatieve eigenschap (wisselen) kan bij de optelling en de vermenigvuldiging worden gehanteerd
  a + b = b + a ➔ 360 + 2 540 = 2 540 + 360
  a x b = b x a ➔ 460 x 5 = 5 x 460
- De associatieve eigenschap (schakelen) van de optelling en de vermenigvuldiging
  (a + b) + c = a + (b + c) ➔ (84 + 75) + 25 = 84 + (75 + 25) = 84 + 100 = 184
  (a x b) x c = a x (b x c)➔ (34 x 25) x 4 = 34 x (25 x 4) = 34 x 100 = 100 x 34 = 3400
- Combineren van 'schakelen' en 'wisselen'
  45 + 17 + 55 + 83 = 45 + 55 + 17 + 83 = (45 + 55) + (17 + 83) = 100 + 100 = 200
  7 x 25 x 9 x 4 = 7 x 25 x 4 x 9 = 7 x (25 x 4) x 9 = 7 x 100 x 9 = 700 x 9 = 6 300
- De distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling (aftrekking) (splitsen van vermenigvuldigtal of compenseren)
  a x (b + c) = (a x b) + (a x c) ➔ 7 x 44 = 7 x (40 + 4) = (7 x 40) + (7 x 4) = 280 + 28 = 308
  a x (b – c) = (a x b) - (a x c) ➔ 7 x 46 = 7 x (50 – 4) = (7 x 50) – (7 x 4) = 350 – 28 = 322
- De distributieve eigenschap van de deling t.o.v. de optelling (aftrekking) (splitsen van deeltal of compenseren)
  (a + b) : c = (a : c) + (b : c) ➔ 848 : 8 = (800 + 48) : 8 = (800 : 8) + (48 : 8) = 100 + 6 = 106
  (a – b) : c = (a : c) – (b : c) ➔ 1 552 : 4 = (1 600 : 4) – (48 : 4) = 400 – 12 = 388
- Combinatie van commutativiteit, distributiviteit (splitsen) en compenseren (werken met mooie getallen)
  18 x 99 = 99 x 18 = (100 x 18) – (1 x18) = 1 800 – 18 = 1 782

▪ Toepassen van wiskundige aspecten
- Een som verandert niet van waarde als men bij de ene term een getal bijtelt dat van de andere term wordt afgetrokken (de 'wip', compenseren)
  865 + 398 = (865 - 2) + (398 + 2) = 863 + 400 = 1263
- Een verschil verandert niet van waarde als men aftrektal en aftrekker vermeerdert of vermindert met hetzelfde getal (de 'halter', compenseren)
  387 - 198 = (387 + 2) - (198 + 2) = 389 - 200 = 189
  587 - 305 = (587 -5) - (305 - 5) = 582 - 300 = 282
- Een product verandert niet van waarde als men de vermenigvuldiger deelt door een getal dat met het vermenigvuldigtal wordt vermenigvuldigd en omgekeerd (de 'wip')
  16 x 45 = (16 : 4) x (4 x 45) = 4 x 180 = 720
  5 x 48 = (2 x 5) x (48 : 2) = 10 x 24 = 240
- Een quotiënt verandert niet van waarde als men deeltal en deler vermenigvuldigt met (of deelt door) hetzelfde getal (de 'halter')
  840 : 60 = (840 : 10) : (60 : 10) = 84 : 6 = 14
  24 : 0,6 = (10 x 24) : (10 x 0,6) = 240 : 6 = 40

▪ Bewerkingen met breuken
- Optellen met breuken
  Gelijknamige breuken: 3/4 + 2/4 = 5/4 = 1 ¼
  Ongelijknamige breuken worden eerst gelijknamig gemaakt:
  2/4 + 1/8 = 4/8 + 1/8 = 5/8
  Natuurlijk getal + breuk: 2 + 2/3 = 6/3 + 2/3 = 8/3 of 2 2/3
  Kommagetal + breuk: 0,375 + 1/2 = 3/8 + 1/2 = 3/8 + 4/8 = 7/8 of
  0,375 + ½ = 0,375 + 0,500 = 0,875
- Aftrekken met breuken
  Gelijknamige breuken: 3/4 – 2/4 = ¼
  Ongelijknamige breuken worden eerst gelijknamig gemaakt:
  2/4 – 1/8 = 4/8 – 1/8 = 3/8
  Natuurlijk getal – breuk: 5 – 4/5 = 25/5 – 4/5 = 21/5 of 4 1/5
  Kommagetal – breuk: 0,75 – 1/2 = 3/4 - ½ = 3/4 – 2/4 = 1/4 of
  0,75 – 1/2 = 0;75 – 0,50 = 0,25

- Vermenigvuldigen met breuken
  3 x 1/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5
- Delen met breuken is facultatief in ons leerplan. We weiden er dan ook niet verder over uit.

Als de leerlingen over keuzemogelijkheden beschikken, kunnen zij daaruit een persoonlijke en verantwoorde keuze maken. Als didactische consequentie houdt dit o.a. in dat individuele verschillen worden geaccepteerd en zelfs worden benut bij het bespreken van mogelijke oplossingswerkwijzen.

4.1.4.3 Verschillende hoofdrekenactiviteiten

Het leerplan wiskunde voor de basisschool van OVSG (1998, p. 146 – 147) onderscheidt een tweetal soorten activiteiten: intentionele activiteiten en open vraagstelling, die wij graag uitbreiden met een derde soort, de regelmatige oefenmomenten.

a) Intentionele activiteiten

Het accent ligt hierbij op het bespreken, vergelijken en beoordelen van gevolgde werkwijzen zodat leerlingen voor zichzelf de meest efficiënte werkwijze(n) kunnen kiezen. Leerlingen dienen hierbij ook de gelegenheid te krijgen hun eigen (informele) strategieën toe te lichten aan de andere leerlingen. Een passend gebruik van schema's en modellen bevordert de flexibiliteit.

In vroegere literatuur treffen we hier nog een tweedeling aan.[5] N. Beke (Rijkshoofdinspecteur gesubisidieerd basisonderwijs) en J. Van Vreckem (Rijksinspecteur gesubsidieerd basisonderwijs) onderscheidden in 1990 intentionele lessen waar de leraar bewust een bepaald oplossingsprocédé aan de leerlingen leert en dit inoefent en de meer 'vrije' lessen waar de leraar de leerlingen volledig vrij laat om hun werkwijze voor het uitrekenen van de bewerkingen te kiezen. Beide auteurs erkenden ook dat de intentionele lessen de vrije lessen vruchtbaar kunnen beïnvloeden. Hoe ruimer de keuze uit de mogelijke oplossingsprocédés, hoe vrijer en creatiever een leerling kan kiezen in functie van de uit te rekenen bewerking. Het helpt kinderen op hun niveau te rekenen.
Ook in de huidige praktijk van het hoofdrekenonderwijs treffen we deze tweedeling aan.

b) Open vraagstelling

Hier bied je een open vraag, een context, een probleemsituatie aan, waarbij de leerlingen vanuit de probleemrepresentatie (oriënteren, analyseren…)[6] de passende strategieën kiezen en aanwenden. Die kunnen verschillen van leerling tot leerling.

c) Regelmatige oefenmomenten

We vinden deze regelmatige oefenmomenten een beproefde waarde en die mogen gerust behouden blijven of opnieuw worden geïntroduceerd in de scholen. Ook en misschien vooral voor de zwakke rekenaars zijn deze oefenmomenten effectief.

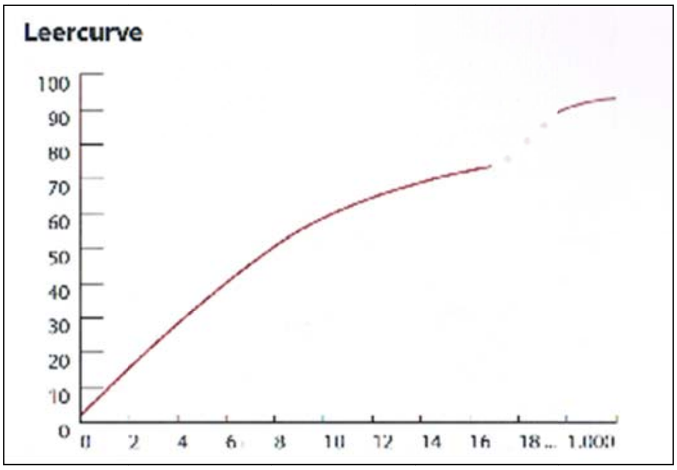
Wetenschappelijk onderzoek in de cognitieve psychologie heeft aangetoond dat het aanleren van een vaardigheid over het algemeen een specifiek patroon volgt (Anderson J.R., 1995; Newell en Rosenbloom, 1981). In onderstaande grafiek (leercurve genoemd) zie je dat leerlingen nogal wat oefening nodig hebben om een vaardigheid redelijk te beheersen. Pas na ongeveer 24 keer oefenen bereiken ze een beheersing van 80 %. De toename van de beheersing wordt na elke oefensessie minder. De toename is het grootst in het begin van de oefensessies, maar deze wordt geleidelijk aan steeds kleiner als de leerlingen hun kennis en vaardigheden verder bijschaven.[7] De eerste oefensessies dienen dus kwaliteitsvol ingericht te worden en direct tot het doel leiden.

---

[5] Ministerie van Onderwijs-directie van het basisonderwijs, *Werken met getallen en met vormen*. vierenveertigste pedagogische week 1990, p. 69 - 70

[6] Zie ook OVSG, *Didactische reader bij de OVSG-toets 2007, probleemoplossende vaardigheden binnen wiskunde*. Brussel, OVSG, 2007, p. 61

[7] Naar Marzano R.J., Pickering D.J. & Pollock J.E., *Wat werkt in de klas – research in actie – didactische strategieën die aantoonbaar effect hebben op leerprestaties.* Bazalt, 2008, p. 57 - 58



Legende

- Verticale as: mate van beheersing van een vaardigheid. Een score van 100 geeft aan dat de vaardigheid volledig wordt beheerst en een score van 0 geeft aan dat de vaardigheid helemaal niet wordt beheerst.
- Horizontale as geeft het aantal oefensessies weer.

In de literatuur maakt men wel eens het onderscheid tussen gericht oefenen en productief oefenen.[8] Gericht oefenen bestaat dan uit korte klassikale interactieve oefensessies waarbij gericht de aandacht wordt gevestigd op getalrelaties of waarbij hoofdrekenstrategieën worden geoefend.

Bij productief oefenen maak je gebruik van open opgaven, met een grote mate aan differentiatie van oplossingswijzen en oplossingen. Enkele voorbeelden:

- het getal van de dag. Vandaag is het getal van de dag 7. Bedenk nu eens allerlei sommen die 7 uitkomen;
- een rijtje van 100. Het volgende rijtje is gemaakt door steeds de vorige twee getallen op te tellen. 3 5 8 13 21. Er is begonnen met twee willekeurige getallen. Maak nu zelf zo'n rijtje van vijf getallen, maar dan één waarvan het laatste getal zo dicht mogelijk in de buurt van 100 komt.

We formuleren hier enkele aandachtspunten waarop je kunt letten bij het oefenen:

- begin elke wiskundeles met enkele minuten hoofdrekenen op een speelse en motiverende manier (leitjes met krijt, oefenspelletjes, race tegen de tijd…) om de hoofdrekenwerkwijzen in te slijpen en de te memoriseren of gememoriseerde leerstof (o.a. maal- en deeltafels) te laten functioneren in allerlei uiteenlopende situaties;
- maak deze oefenmomenten ook interactief: laat verschillende oplossingswijzen bespreken en met elkaar vergelijken ('wat zijn de handigste werkwijzen om 0,5 x 46 uit te rekenen?', 'Waarom is 92 verkeerd? Wat is hier dan gebeurd?', 'Waarom is 230 fout? Wat is hier dan gebeurd?', 'Waarom is (0 x 40) + (5 x 6) hier verkeerd?, 'Hoe zou jij een leerling die (0 x 40) + (5 x 6) doet op het juiste spoor zetten?'…);
- oefenen is meer dan herhalen. Integreer hoofdrekenopgaven ook in rijke contexten;
- geef directe en gerichte feedback;
- vraag bij memorisatieoefeningen niet steeds hoe een leerling aan de uitkomst komt: het gaat hier om vlot, snel en goed antwoorden;
- oefen zowel visueel als auditief;
- let goed op de zwakke rekenaars: gebruiken zij passende manieren om te rekenen?;
- houd rekening met vakantieverlies (zomerverlies);
- vergewis je ervan welke hoofdrekenstrategieën de leraar van de lagere klas heeft aangeleerd;
- voorzie uiteenlopende oefeningen door elkaar zodat de leerlingen steeds worden uitgedaagd na te denken, met inzicht te redeneren en niet op 'automatische piloot' overschakelen. Wees echter voorzichtig met te veel en te snel de nadruk te leggen op oefeningenreeksen die de leerlingen in

[8] PO-raad, *Conferentie Excellent rekenonderwijs*, Eindhoven, 24/09/2009, sessie Effectieve aanpakken bij versterking rekenonderwijs, wat werkt? gegeven door Gert Gelderblom en sessie Optellen en aftrekken tot 20/tot 100 gegeven door Ina Cijval

een vastgelegde tijdspanne moeten doorlopen. Menig zwakke rekenaar komt met deze reeksen niet op tijd rond en gaat onder de tijdsdruk nog meer fouten maken.

4.1.4.4 Verschillende fasen in een hoofdrekenles of -lessenreeks[9]

We onderscheiden in een goede hoofdrekenles of –lessenreeks een drietal fasen.

a) Introductiefase

Leg het doel van de les uit aan de leerlingen. Dit biedt veiligheid en houvast. Leerlingen weten wat ze gaan leren en waarom. Dit verhoogt hun betrokkenheid bij de les.[10]
Het uitgangspunt is een context die gekozen is in functie van het te bereiken doel en bevat een herkenbaar en uitdagend probleem voor de leerlingen. Die probleemsituatie zet de leerlingen aan tot zelf zoeken van oplossingen, individueel of via partner- of groepswerk. Door samen te zoeken, zet men elkaar vaak aan het denken.
Als kinderen naar oplossingen gezocht hebben, is een moment van interactie en reflectie aangebroken. Leerlingen kunnen dan hun eigen oplossingen en oplossingsstrategieën inbrengen. Ook jouw inbreng is hierbij van cruciaal belang. Als leraar waak je erover dat je leerlingen zinvolle strategieën gebruiken en dat verkeerde, inefficiënte strategieën niet beklijven. Op basis van de inbreng van de leerlingen zorg je ervoor dat de belangrijkste zaken duidelijk en helder worden besproken.

b) Inoefenfase

In deze fase krijgen de leerlingen de kans om de in de introductiefase verworven rekenhandelingen in te oefenen en ‘vast’ te zetten. Voorzie daarvoor zinvolle inoefenmogelijkheden. Het oefenen wordt uiteraard uitdagender en motiverender als het is gekoppeld aan concrete contexten.
Ook het werken met ‘kale’ rekensommen blijft zinvol en noodzakelijk. We denken hierbij o.a. aan het automatiseren van de maal- en deeltafels, het automatiseren van de optel- en aftreksommen tot 20, het inslijpen van hoofdrekenstrategieën, het onderhouden van de hoofdrekenstrategieën (drill and practice)… Toch vinden wij het van primordiaal belang dat leerlingen, zelfs wanneer ze met kale rekensommen bezig zijn, deze kunnen inkleden in een realistische context (‘Bedenk bij één van de oefeningen een rekenverhaal, los het op en geef door aan jouw buur.’, ‘Wanneer is het zinvol om deze rekenstrategie te hanteren?’…).
Inoefenen kan individueel of in groepjes. Sommige kinderen kunnen zelfstandig op eigen kracht verder en kunnen zelf hun eigen werk corrigeren. Anderen hebben nood aan bijkomende ondersteuning tijdens de verlengde instructie.[11]

c) Toepassingsfase

Het is belangrijk dat de geleerde rekenhandelingen kunnen worden toegepast in een brede waaier van situaties (transfer). De toepasbaarheid van kennis en vaardigheden is immers de kern van het wiskundeonderwijs. In deze fase gebruik je contexten die herkenbaar en aantrekkelijk zijn voor de leerlingen maar waarin geen nieuwe leerinhouden aan bod komen.

In een vorige didactische reader wezen we al op de mogelijkheden maar ook de beperkingen van het werken met contexten.[12] We willen hier aan toevoegen dat wie met contexten werkt, liefst uiteenlopende contexten zoekt en aanbiedt aan de leerlingen zodat het geleerde zo breed mogelijk kan functioneren (transfer).

---

[9] OVSG, *Wiskunde.* Brussel, OVSG, 1999, p. 18 - 21

[10] Naar Gelderblom G., *Effectief omgaan met zwakke rekenaars*. Amersfoort, CPS, 2008, p. 71

[11] In de didactische reader bij de OVSG-toets over probleemoplossende vaardigheden binnen wiskunde. vind je op p. 80 – 81 verschillende mogelijkheden om hulp te bieden aan ‘zwakke’ rekenaars tijdens o.a. de verlengde instructie.

[12] OVSG, *Didactische reader bij de OVSG-toets 2007, probleemoplossende vaardigheden binnen wiskunde.* Brussel, OVSG, 2007, p. 56 - 57

Houd er ook rekening mee dat onderwijs steeds een zekere mate van ‘isolering van de leerstof’[13] vereist. ‘Wie optellen en aftrekken voortdurend concreet voorstelt als het instappen en uitstappen van passagiers uit een autobus, bouwt bij de leerlingen geen goed begrip van optellen en aftrekken in hun abstracte betekenis op. Deze leerlingen blijven te concreet aan de voorbeeldsituatie gebonden en zien niet of onvoldoende dat optellen en aftrekken ook in totaal andere situaties van toepassing kunnen zijn en zich daar ook heel anders voordoen’ (Van Parreren, 1988, p. 73).

4.1.4.5 Verinnerlijkt handelen en verwoorden

‘Er bestaat een consensus om het rekenen van de basisschool als verinnerlijkt handelen te beschouwen. Zowel Piaget als de Russische leerpsychologie gaan hiervan uit. Leren rekenen wordt dan opgevat als een (stimuleren en begeleiden van een) evolutie van materiële, concrete handelingen naar mentale handelingen (abstract rekenen). Het correct verwoorden van de handelingen wordt algemeen beschouwd als een belangrijke sturing van het handelen en een onmisbare ondersteuning van het verinnerlijkingsproces’ (Deckeers & Aerts, 2005, p. 21)

Leren vraagt tijd en zal de drie niveaus van de handelingspsychologie doorlopen:

1) materieel of motorisch niveau;

2) perceptieniveau / schematisch niveau;

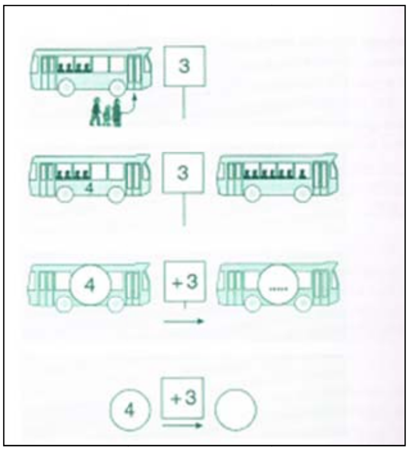
3) mentaal niveau.[14]

Rekenen is mentaal handelen, maar het kan (moet kunnen) terugvallen op concreet handelen. Vandaar het belang van het vertrekken vanuit de realiteit en van het veelvuldig gebruik van materialen en modellen (zie ook 4 en 6).

Ga uit van contexten (zie ook 3). Contexten geven getallen en bewerkingen betekenis. Alle leerlingen, maar vooral de zwakke rekenaars, worden ondersteund door contexten.

Voor veel zwakke rekenaars geldt dat de overgang van de voorstelbare context of het concrete handelen naar de abstracte som soms te abrupt gaat. Vooral voor zwakke rekenaars is het daarom belangrijk dat de context heel geleidelijk overgaat naar steeds meer schematische voorstellingen (Gelderblom, 2008, p. 34).

Een voorbeeld van het geleidelijk schematiseren van een voorstelbare context naar een formele som is de eerder aangehaalde buscontext.[15]



---

[13] Term ontleend aan Van Parreren C.F., *Ontwikkelend onderwijs.* Leuven, Acco,1988, p. 73

[14] Merk op dat de niveaus concreet, schematisch, abstract relatieve begrippen zijn: een getal is voor de meeste kleuters een abstract gegeven, terwijl het voor lagereschoolkinderen op een bepaald ogenblik volstrekt concreet kan zijn.

[15] Gelderblom G., *Effectief omgaan met zwakke rekenaars*. Amersfoort, CPS, 2008, p. 35, voorbeeld ontleend aan Pluspunt lesboek groep 3

Het (laten) verwoorden van de handeling laat je toe om het denkproces van de leerling te volgen waardoor je beter kunt inzien waar het eventueel fout loopt en je gepast en gericht kunt remediëren.

4.1.4.6 Gebruik van krachtige denkmodellen

Voor veel kinderen is de stap naar de mentale voorstelling niet gemakkelijk. Goed wiskundeonderwijs moet hen daarbij helpen door tussen het concrete en het abstracte een brug te slaan en kinderen hulpmiddelen aan te reiken, de zogenaamde modellen[16]: kralenkettingen, kwadraatbeelden, honderdveld, M.A.B.-materiaal, rekenrek, diagrammen, schetsen, visuele voorstellingen, symbolen, tafelkaarten …

Aan het gebruik van modellen willen we een aantal eisen stellen:

a) het model dient zo gekozen te zijn dat de concrete situatie voor de kinderen nog herkenbaar is maar hen tegelijk ook aanzet tot abstract denken;

b) gebruik modellen die breed kunnen worden ingezet en transferabel zijn naar allerlei uiteenlopende situaties en de daaraan gekoppelde rekenhandelingen (bv. een verhoudingstabel is een krachtig denkmodel dat in heel wat situaties kan worden aangewend: breuken vereenvoudigen, rekenen met breuken, percentrekenen, schaalberekening, herleidingen bij meten, koopjes en korting, kapitaal – interest – rente…);

c) gebruik zo veel mogelijk concrete voorwerpen, vooral in de fasen van de ontluikende gecijferdheid en het aanvankelijk rekenen;

d) rekenmaterialen moeten toelaten de rekenkundig bedoelde handelingen correct uit te voeren: twee of meer hoeveelheden moeten dus effectief kunnen worden samengevoegd of weggenomen;[17]

e) rekenmateriaal dient verinnerlijking maximaal mogelijk te maken en te stimuleren. Uit diverse onderzoeken blijkt dat visuele structuren vlotter ingeprent en verinnerlijkt worden naarmate ze duidelijker gestructureerd zijn of deel uitmaken van een duidelijke structuur. Daarom een pleidooi om te werken met vaste getalbeelden. Welke getalbeelden een school kiest, behoort uiteraard tot de autonomie van de school;

f) bij getalbeelden dient de voorstelling van een bepaalde hoeveelheid

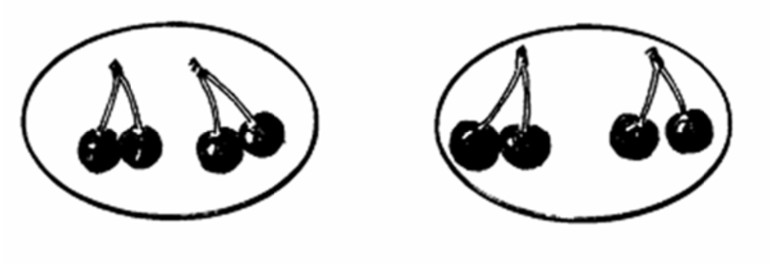
g) zichtbaar te blijven in de volgende hoeveelheden (bv. 3 moet zichtbaar blijven in 4, 5, 6 …). Getalbeelden waarin het aantal niet zichtbaar is en/of het aantal wordt gekoppeld aan een kleur, een lengte, een… waardoor de leerlingen in de kleur, in de lengte geen eenheden zien, zijn dus uit den boze.

De keuze van een bepaald (denk)model komt zo maar niet uit de lucht vallen en is in grote mate afhankelijk van de context en de aard van de bewerking. In het leerplan wiskunde van OVSG vind je een didactische katern i.v.m. het automatiseren van de tafels (p. 157 – 164) waarin je verschillende modellen (groepjesmodel, dozenstructuur, stroken, getallenlijn, rechthoekmodel, kruispuntenmodel) aantreft, die elk op hun beurt een specifieke eigenschap van de vermenigvuldiging of deling concretiseren. Zo veruitwendigt het groepjesmodel enerzijds de structuur van een vermenigvuldiging als herhaalde optelling en anderzijds de deling als verkorte aftrekking (verhoudingsdeling).

---

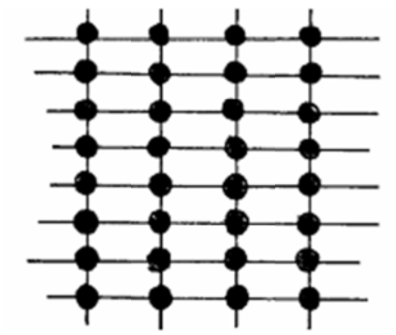
[16] Met modellen bedoelen we in deze reader zowel de concrete materialen (bv. rekenrek) als schematische voorstellingen (bv. verhoudingstabel).

[17] Deze en volgende eisen ontlenen we aan Deckers M. & Aerts R., *Kinderen rekenen – rekendidactiek voor de lagere school*. Mechelen, Wolters-Plantyn, 2005, p. 24 - 27



4 kersen + 4 kersen of 2 x 4 kersen
8 kersen ➔ Hoeveel groepjes van 4 kersen?

Het kruispuntenmodel is dan weer heel geschikt om combinatorische problemen te verduidelijken. Bv. hoeveel combinaties met 4 voorgerechten en 8 hoofdgerechten?



4.1.4.7 Duidelijke leerlijnen en zinvolle leerstappen

In het leerplan wiskunde van OVSG vind je overzichtelijke leerlijnen voor de bewerkingen (zie leerplan p. 100 – 123 met duidelijke leeftijdsaanduidingen wanneer bv. een bepaalde strategie kan aangezet worden, systematisch dient aangeleerd te worden en nog aan kan worden verder gewerkt: de zwarte en grijze balken).
De school beslist zelf in hoeveel en welke leerstappen een bepaalde leerlijn wordt geconcretiseerd. Meestal laten scholen zich hier leiden door het onderwijsleerpakket.
Maar … het leerproces in hoofdrekenen heeft een sterk cumulatief karakter waardoor waakzaamheid geboden is: komt alles aan bod wat het leerplan vraagt? – Zijn de deelleerstappen niet te groot of te klein? Zijn de deelleerstappen logisch opgebouwd? Zijn de deelleerstappen op elkaar afgestemd? – Moeten we hier een correctie op de methode invoeren? – Dienen we meer deelleerstappen te voorzien? – Gaat de methode niet te snel/te traag voor onze leerlingenpopulatie? – Zijn er voldoende inoefenmogelijkheden voorzien? - Worden de hoofdrekenstrategieën inzichtelijk onderbouwd? - …
Zo kun je je afvragen en moet je nagaan of alle essentiële stappen (bouwstenen) zijn gezet (geplaatst) om een bepaalde hoofdrekenstrategie aan te leren. Zo zijn voor de strategie van het splitsen van de tweede term bij optellen en aftrekken een aantal stappen essentieel: 1) automatiseren van de sommen tot 10, 2) getalbegrip tot 100, 3) automatiseren van de sommen tot 20, 4) bouwstenen voor het splitsen nl. tientallen erbij en eraf en de sprong over het tiental, 5) splitsen tot 100 (Danhof e.a., 2008, p. 27).

4.1.4.8 Inzichtelijk onderbouwen

Hoofdrekenstrategieën dienen inzichtelijk onderbouwd en gefundeerd te worden. Leerlingen dienen te begrijpen wat ze aan het doen zijn als ze kiezen voor een bepaalde strategie.
Ook bij te memoriseren leerstof dienen leerlingen in staat te zijn terug te grijpen naar inzicht als zij bv. een bepaald tafelproduct zijn vergeten. Via inzicht dienen zij het vergeten tafelproduct terug uit hun geheugen te kunnen oproepen. Stel je even volgende situatie voor: Arne, een leerling van het vijfde leerjaar, moet cijferoefeningen oplossen en weet plots niet meer hoeveel 8 x 7 is. Als hij in het tweede en derde leerjaar de maaltafels geleerd heeft volgens de reconstructiedidactiek (zie leerplan wiskunde OVSG, p. 157 – 164) zal hij vrij vlug weten dat 8 x 7 = verdubbelen van 4 x 7 of verdubbelen van 2 x 7 en

nogmaals verdubbelen of één maal minder is dan 9 x 7. Hij heeft geleerd gebruik te maken van allerlei steunpunten en vindt vrij vlug terug hoeveel 8 x 7 is en kan verder met zijn cijferoefeningen. Had Arne de maaltafels geleerd volgens de reproductiedidactiek dat had hij alle tafelproducten één voor één moeten inprenten (zonder dat de leraar hem wees op steunpunten, de commutativiteit van de vermenigvuldiging…) om ze nadien foutloos en inzichtloos te kunnen reproduceren. Hij zou geen ander middel gevonden hebben dan de tafel van 7 volledig op te zeggen om er achter te komen hoeveel 8 x 7 is.

4.1.4.9 Het noteren van tussenuitkomsten

In het PPON-onderzoek in Nederland 2004[18] lezen we onder de rubriek 'bewerkingen' een op zijn zachtst gezegd merkwaardige verklaring voor de achteruitgang op dat domein. 'De vaardigheid van leerlingen op het gebied van de bewerkingen is er sinds 1987 over de gehele linie sterk op achteruitgegaan. Dat geldt zowel voor optellen en aftrekken, als voor vermenigvuldigen en delen en de samengestelde bewerkingen. De belangrijkste oorzaak lijkt te liggen in het feit dat leerlingen ten onrechte deze opgaven niet op papier uitrekenen, dat wil zeggen de opgaven 'uit het hoofd' proberen op te lossen' (Janssen, Van der Schootm, & Hemker, 2004, p. 4). Hierbij is een opvallend sexe-verschil gevonden: het zijn vooral de jongens die de toename van het direct uit het hoofd rekenen, veroorzaken. Bovendien zijn het relatief vaak de zwakke rekenaars die uit het hoofd rekenen bij dit soort opgaven.[19] Ander onderzoek (Van Putten en Hickendorff, 2006 aan de universiteit van Leiden)[20] lijkt dit te bevestigen: veel leerlingen proberen deelopgaven als 678 : 12 direct uit het hoofd op te lossen, zonder daarbij tussenuitkomsten te noteren. En verder…'Ik denk dat we inderdaad ontzettend moeten opletten dat kinderen op die kladblaadjes wat opschrijven. Ik zag bij proefafnames van de CITO-eindtoets wat voor 'uitgumcultuur' er bij veel kinderen heerst. De tafels staan in examenopstelling, alles moet van de bank en wat ligt er prominent op de hoek van de tafel? Een gum. Ik heb in klassen gezien dat er werkelijk zo wordt gegumd, dat er absoluut niets meer te zien is, zelfs al hou je het tegen het licht. Als er zoveel nadruk ligt op hoe je rekent, dan verwacht je dat er op de basisscholen een cultuur ontstaat waarin je ook wat van die berekening laat zien en dat die leraar er ook aandacht aan besteedt. Kennelijk is dat niet het geval' (Van Zanten & Buijs, 2009, p. 79).

Daarom willen we pleiten om zeker de nodige tijd en ruimte te voorzien voor het noteren van de tussenuitkomsten (ook wel hulpnotaties genoemd) bij hoofdrekenen. We weten dat de wiskundemethodes, toetsen, centrale toetsen, toetsen uit kindvolgsystemen… hier niet altijd de nodige plaatsruimte voor voorzien. Dit los je dan op door de leerlingen de tussenuitkomsten te laten noteren op een kladblaadje, in een apart schriftje…
Uit deze tussenuitkomsten kun je als leraar veel leren m.b.t. het rekenniveau van de leerlingen, het strategiegebruik van de leerlingen… en kun je gericht inspelen op foutieve aanpakken. Zo kon één van onze adviseurs toen hij een twintigtal leerlingen niveau derde en vierde leerjaar een aantal hoofdrekenopgaven liet maken, merken dat een aantal leerlingen toch wel inadequate strategieën gebruikten om tot de oplossing te komen. En dit ondanks het feit dat de oplossing correct was. We lichten even toe. Om 87 – 39 uit te rekenen, gingen enkele leerlingen (4 van de 20) als volgt te werk:

87 – 39
= (80 + 7) – (30 + 9)

---

[18] PPON = Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau. De peilingsonderzoeken voor rekenen-wiskunde vinden plaats in: jaargroep 8/leerjaar 6 (einde basisonderwijs), jaargroep 5/leerjaar 3 (medio basisonderwijs) en het speciaal basisonderwijs (SBO). In het SBO gaat het om leerlingen die qua leeftijd vergelijkbaar zijn met leerlingen in jaargroep 8. De eerste peiling voor rekenen-wiskunde vond plaats in 1987. Sindsdien zijn er vier peilingscycli afgerond.

[19] Van Zanten M. & Buijs K., Aandachtspunten voor verbetering van het reken-wiskundeonderwijs – een dubbelinterview met A. Treffers en K. van Putten. *Panamapost, jg 28*, nr. 1, voorjaar 2009, p. 79

[20] Buijs K., Hoe schrijf je dat nou netjes op? Het gebruik van hulpnotaties in het reken-wiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens*, jaargang 28, 2008/2009, nr. 3, p. 32

80 – 30 = 50
9 – 7 = 2
50 - 2 = 48 [21]

Een leraar die aandacht besteedt aan tussenuitkomsten, ziet dit en wijst de leerlingen op de incorrectheid en inadequaatheid van deze strategie. Als een leerling dezelfde redenering aanhoudt bij cijferen, gaat hij gegarandeerd de mist in:

$$\begin{array}{r} 87 \\ -\ 39 \\ \hline 52 \end{array}$$

Dat de prestaties zienderogen vooruit gaan als de leerlingen wordt gevraagd/verplicht om tussenuitkomsten te noteren heb je misschien zelf al kunnen vaststellen. Ook A. Treffers en K. van Putten constateren dit in hun onderzoeken.[22] A. Treffers n.a.v. het PPON-onderzoek zegt ‘frappant is dan verder, dat als je de betreffende leerlingen vraagt het op papier te berekenen, de prestaties een stuk hoger uitkomen.’ K. van Putten repliceert: ‘we zijn bezig met de uitwerkingen van een experiment hieromtrent. We laten kinderen, nadat ze vrij waren in het oplossen van opgaven, verplicht opschrijven hoe ze rekenen. De uitwerkingen zijn nog niet klaar en het is maar een proefexperiment, maar er trad ongeveer 15% verbetering op in de prestaties. Die verbetering trad op bij kinderen die het eerst uit het hoofd deden en het daarna verplicht moesten opschrijven.’[23]

---

[21] Dit is wiskundig incorrect en ook geheel iets anders dan het werken met tekorten zoals dat wel eens voorkomt in Nederlandse reken-wiskundemethodes. We lichten dit kort toe:
87 – 39 = (80 + 7) – (30 + 9) → 80 – 30 = 50 / 7 – 9 = - 2 / 50 – 2 = 48

[22] Van Zanten M. & Buijs K., Aandachtspunten voor verbetering van het reken-wiskundeonderwijs – een dubbelinterview met A. Treffers en K. van Putten. *Panamapost*, *jg 28*, nr. 1, voorjaar 2009, p. 79

[23] Intussen zijn wij in staat geweest deze resultaten te bekijken en de conclusies ervan bevestigen de conclusies van het proefexperiment: “The most important implication of this study for school practice probably lies in promoting the value of writing down solution steps on more difficult complex arithmetic problems. As noted before, students nowadays are less inclined than students were a decade ago to use a written strategy in solving these kinds of problems on complex division (Hickendorff et al., 2009). In the present study we showed that in comparisons both between and within students, mental calculation may be less accurate than written calculation. This raises the question of what role school practice plays in the strategy choices that students make. It might be that the large emphasis on mental calculation in realistic mathematics education has had the side effect of causing some students to overuse mental calculation. A recommendation is that teachers emphasize to their students these possible benefits of writing down notes or calculations.”

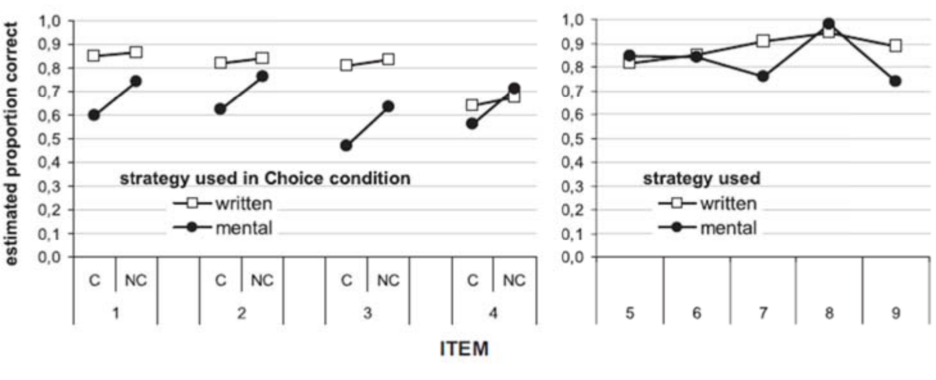


Figure 4. Estimated probabilities of solving Items 1–9 correctly for students at the mean level of mathematics achievement. Left plot: Items administered in choice (C) as well as no-choice (NC) conditions. For each item, students who used mental calculation on that item in the choice condition are separated from those who used a written procedure. Right plot: Items administered only in the choice condition.

Verder blijft het gebruik van het aloude schoolbord of het digitale schoolbord van cruciaal belang. Je kunt, tijdens de verbeter- en besprekingsmomenten, aanpakken van je leerlingen 'natuurgetrouw' noteren en jouw bespreking eraan koppelen.

In de rand willen we hierbij ook benadrukken dat men van de leerlingen mag, neen moet eisen dat zij netjes, ordelijk en overzichtelijk werken. Als leerlingen hun berekeningen onoverzichtelijk noteren, is het maken van fouten onvermijdelijk. Kweek deze gewoonte bij de leerlingen aan. Ook als zij in hun rekenschrift fouten ontdekken of moeten corrigeren, laat je hen beter de hele oefening opnieuw en netjes maken.

4.1.4.10 Keuzerekenen

Op grond van reflectie maken je leerlingen (samen met jou) een keuze.
Het is duidelijk dat om te kunnen kiezen verschillende oplossingswegen moeten gekend zijn. De didactiek bij hoofdrekenen heeft dus tot doel de leerlingen verschillende mogelijkheden te laten ontdekken en/of ervaren. Daarna moeten de leerlingen de kans krijgen om zelf een verantwoorde keuze te maken tussen de (vele) benaderingen.[24]

4.1.4.11 Interactie

Kinderen leren niet alleen individueel, maar ook in een sociale context. Samen zoeken naar oplossingen, expliciteren van gevonden inzichten en nadenken over strategieën ondersteunen het leerproces (OVSG, 1999, p. 11). Ook in de hoofdrekenlessen kunnen verschillende interactiemogelijkheden aan de orde komen: overleg in tweetallen of in groepjes rond het hanteren van een bepaalde aanpakstrategie, klassikaal oplossingswegen bespreken en vergelijken, voor de klas oplossingswegen laten toelichten… Door interactie streef je ernaar kinderen inzicht te laten verwerven in oplossingswegen van andere leerlingen en hun eigen inzichten te verdiepen en te verruimen.

4.1.4.12 Reflectie

Leren – en dus ook wiskundeleren - wordt bevorderd door reflectie. Reflecteren betekent nadenken over wat je zult doen, aan het doen bent of gedaan hebt.

Reflecteren is van groot belang voor het wiskundeonderwijs:

- door te reflecteren worden kinderen zich meer bewust van hun eigen handelen en vooral van de structuur van dat handelen;
- ze leren zich zo kritischer op te stellen tegenover hun eigen handelen;
- ze worden zelfstandiger in hun denken en dus (steeds) minder afhankelijk van jou;
- hun denken wint aan planmatigheid;
- ze kunnen, indien nodig, een bepaalde aanpak makkelijker terughalen om te kijken of die ook in andere gevallen kan worden toegepast. Reflectie leidt tot generalisatie;
- reflectie bevordert flexibiliteit in het denken. Naarmate een kind beter beseft hoe het heeft gehandeld, kan het de gevolgde werkwijze, indien nodig, gemakkelijker herzien. En bovendien lukt het dan beter de gedachtegang ook aan anderen duidelijk te maken en tot uitwisseling van gedachten te komen;
- als je weet hoe je hebt gedacht en waarom je zo hebt gedacht, geeft dat zelfvertrouwen.[25]

Als leraar besteed je permanent aandacht aan het (leren) reflecteren op de gekozen oplossingswijze en de gevonden oplossing. Je kunt op verschillende manieren het reflecteren van je leerlingen bevorderen en optimaliseren:

In Hickendorf M. & Van Putten C.M. Individual differences in strategy use on division problems: mental versus written computation, 2010, *Journal of Educational Psychology, Vol. 102*, No. 2, p. 448 en 450

[24] OVSG, *Leerplan Wiskunde voor de basisschool*. Brussel, OVSG, 1998, p. 151

[25] Nelissen J. & Van Oers B., *Reken maar! Reflecties op de praktijk, JSW-boek 26.* Baarn, Bekadidact, 2000, p. 55 - 56

- samen met de leerlingen vooraf mogelijke oplossingswegen inventariseren;
- op andere momenten meer nadruk leggen op de bespreking achteraf: je bespreekt dan aanpakgedrag, keuze van de hoofdrekenstrategie(en), de oplossing…;
- leerlingen laten nadenken over eigen en andermans fouten. Dit kan het inzicht in eigen handelen vergroten. Tijdens de inoefenfase van een hoofdrekenles loop je rond en observeer je het aanpakgedrag van je leerlingen. Je kunt bij fouten ofwel de fout omcirkelen of een tekentje bij de fout opgeloste oefening zetten en de leerling zijn/haar fout laten ontdekken en verwoorden, laten verwoorden hoe de fout is ontstaan en de fout laten herstellen. Je kunt ook de leerlingen even laten ophouden met werken en een fout gemaakte oefening op het bord schrijven. Je kunt eventueel de fout omcirkelen. Daarna laat je de leerlingen mogelijke verbeteraanpakken suggereren;
- coöperatieve werkvormen inschakelen, bv. zoek iemand die…
- Alle leerlingen krijgen een werkblad. Steffie en Sam vormen een tweetal. Sam kiest een som van zijn blaadje: "Weet jij hoeveel 4 x 98 is?" Steffie denkt na, zegt de uitkomst en vertelt hoe zij heeft gerekend. "Ik doe 4 x 100, dat is 400. Dan doe ik er 4 x 2 af. Dat is dan 392." Sam schrijft dit op zijn blaadje. Steffie controleert of Sam haar aanpak goed heeft genoteerd en zet een tekentje op het blad als dat zo is. Nu mag Steffie aan Sam een som vragen. Zij kiest 736 – 98. Sam berekent en licht zijn aanpak toe." 736 – 100, dat is 636. Dan nog 2 eraf. Dat is dan 634." Steffie ontdekt de fout en probeert nu Sam te coachen. " Dat is handig dat je er eerst 100 afhaalt, maar dan haal je er toch 2 te veel af." Sam realiseert zich dat hij die 2 er bij op moet tellen. Hij herstelt zich. Steffie noteert de aanpakwijze van Sam en Sam 'tekent'. Ze steken nu beiden hun hand omhoog ten teken dat ze een nieuw maatje zoeken;[26]
- leerlingen de volgende vragen leren stellen:
  - Kwam ik tot het goede resultaat?
  - Koos ik daartoe de juiste werkwijze?
  - Nam ik een korte weg?
  - Hoe kon ik het nog vinden?
  - Gaat het wel goed zo?
  - Ben ik hiermee tevreden?
  - Zal ik het eens anders proberen?

In het leerplan wiskunde OVSG vind je bij de domeinoverschrijdende doelen; 1.Strategieën en probleemoplossende vaardigheden enkele doelen m.b.t. reflecteren.

Deze doelen zijn domeinoverschrijdend en worden gerealiseerd via wiskundige activiteiten in de drie domeinen (getallen, meten en meetkunde). Hiervoor zijn geen echte leerlijnen ontwikkeld. Wel worden aspecten onderscheiden van de doelen en worden didactische suggesties gegeven per leeftijdsgroep.

1.4 De leerlingen kunnen reflecteren op hun eigen oplossingsproces en oplossingsgedrag.

1.4.1 De leerlingen kunnen reflecteren op een oplossingsproces en oplossingen die fout gelopen zijn en zo het oplossingsproces bijsturen en de oplossing aanpassen.

1.4.2 De leerlingen kunnen reflecteren op de eigen oplossingsweg.

1.4.3 De leerlingen kunnen reflecteren op hun eigen ontwikkeling op wiskundig gebied en hun heuristisch denken.

1.4.4 De leerlingen kunnen zich verplaatsen in een ander.

4.1.4.13 Plezier

Je kunt situaties creëren waarbij leerlingen het zinvol en plezierig vinden om aan hoofdrekenen te doen. We denken hierbij aan allerlei rekenspelletjes zoals het vroegere populaire t.v.- spelletje 'cijfers en letters', bingo, kwartet, domino… maar ook diverse spelletjes die je vindt op internet. Vooral http://www.fi.uu.nl/rekenweb/ is een populaire website met een waaier aan diverse rekenspelletjes. Het integreren van spelletjes in de rekenles doe je o.a. omdat:

[26] Naar Borghouts C. & Buter A., Interactie in de reken-/wiskundeles. *Volgens Bartjens, jg 25,* nr. 1, 2005/2006, p. 26-27

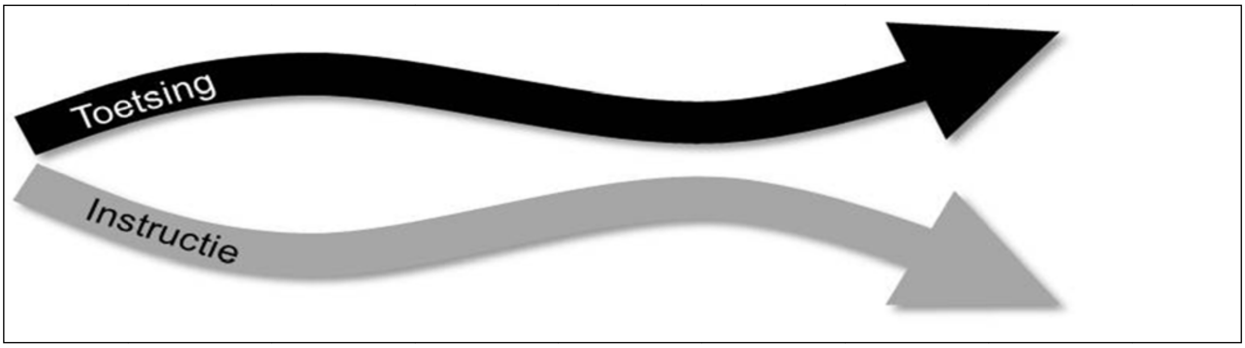
- kinderen van spelletjes houden;
- kinderen gemotiveerd zijn om spellen te spelen ;
- het goed spelen van een spel direct succes oplevert;
- je een extraatje in je rekenles wil inbouwen;
- je een deel uit je wiskundemethode wil vervangen;
- je bij een zwakke rekenaar een bepaalde vaardigheid wil inslijpen, een bepaald hardnekkig probleem wil aanpakken, hem/haar over een bepaalde moeilijkheid wil helpen.[27]

4.1.4.14 Differentiatie

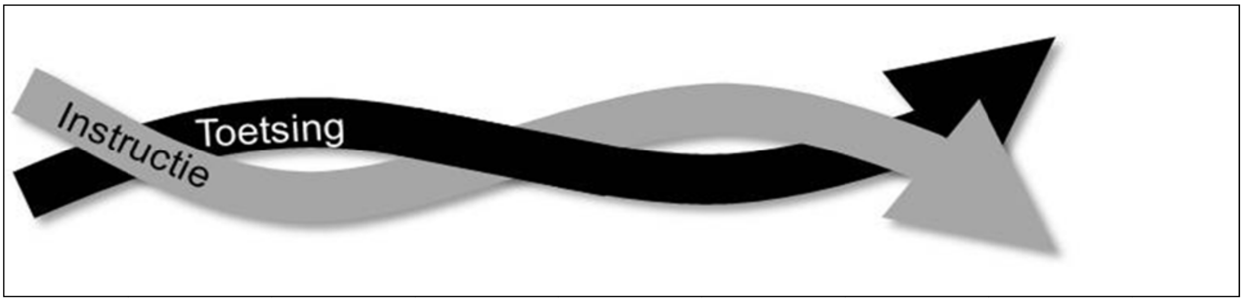
Differentiatie beschouwen we als alle onderwijskundige maatregelen die worden getroffen om binnen het onderwijs rekening te houden met verschillen tussen kinderen. Omwille van deze belangrijke materie verwijzen we naar de publicatie waar een vrij uitgebreid hoofdstuk hier dieper op ingaat.

4.1.4.15 Toetsgegevens verklaren

Scholen en leraren hanteren methodegebonden en –onafhankelijke toetsen om de rekenontwikkeling van hun leerlingen in kaart te brengen en te evalueren en deze eventueel terug te kunnen bijsturen, om rapportcijfers te hebben, om…
Soms gaan toetsen een eigen leven leiden, naast en geheel onafhankelijk van het (hoofd)(reken)onderwijs.



Waar we naar moeten streven is dat toetsen en instructie op één lijn zitten, dat we toetsen gebruiken om onze instructie aan te passen, dat we uit toetsen kunnen leren, dat we uit toetsen relevante informatie kunnen afleiden om onze instructiekwaliteit en om de kwaliteit van ons (hoofd)rekenonderwijs te optimaliseren.



Volgende vragen zijn relevant n.a.v. toetsen en toetsgegevens:[28]

---

[27] Naar Noteboom A. & Notten C., Hoe kun je spelletjes gebruiken in de rekenles? *Volgens Bartjens*, *jg 28*, 2008-2009, nr. 5, p. 25

[28] Vragen ontleend aan PO-raad, *Conferentie Excellent rekenonderwijs.* Eindhoven, 24/09/2009, sessie Optellen en aftrekken tot 20/tot 100 gegeven door Ina Cijval

- Vragen stellen op klasniveau
  - Hoe doet de klas het als geheel?
  - Welke items scoren goed?
  - Welke items vallen uit?
  - Waarom is dat zo?
  - Wat zeggen de toetsgegevens over mijn gegeven (hoofd)rekenonderwijs?
  - Wat zeggen de toetsgegevens over mijn instructiekwaliteit (inclusief verlengde instructie, pre-instructie)?
  - Heb ik de afgelopen periode voldoende onderwijstijd voor (hoofd)rekenonderwijs ingeroosterd?
  - Heb ik de aandachts- en/of risicoleerlingen intensief begeleid?
- Vragen stellen op individueel niveau
  - Hoe doet deze leerling het?
  - Waarom stagneert zijn/haar rekenontwikkeling?
  - Is de instructie te kort, te weinig expliciet?
  - Krijgt deze leerling voldoende tijd?
- Vragen stellen op schoolniveau
  - Hoe doet de school het als geheel?
  - Wat bereiken wij op onze school met onze leerlingen?
  - Wat leren ons de outputgegevens bij outputindicatoren 1,2,3 en 10?
    - Outputindicator 1. De school toont met valide en betrouwbare gegevens op schoolniveau aan dat de leerlingen aan het eind van hun schoolloopbaan in de basisschool de leergebiedgebonden eindtermen bereiken.
    - Outputindicator 2. De school toont met betrouwbare en valide gegevens aan dat ze de ontwikkelingsdoelen, de leergebiedoverschrijdende en de attitudinale eindtermen nastreeft.
    - Outputindicator 3. De school toont de voortgang en/of de leerwinst bij de leerlingen aan met betrouwbare en valide gegevens in overzichten van leerlingengroepen en op schoolniveau.
    - Outputindicator 10. De school toont met betrouwbare en valide gegevens aan dat haar onderwijs (globaal) heeft bijgedragen tot succes in het secundair onderwijs en de verdere doorstroming van de leerlingen.
  - Besteden wij op school voldoende tijd aan (hoofd)rekenonderwijs?

4.1.5 Ten slotte

Dit artikel vormt slechts een uittreksel uit een omvangrijke publicatie omtrent hoofdrekenonderwijs. Thema's zoals ontluikende gecijferdheid, hoofdrekenen in de onderbouw, hoofdrekenen in de bovenbouw, aandacht voor zwakke rekenaars, het belang van instructie,… worden niet verder uitgewerkt in dit artikel.

Je kan deze informatie vinden in de publicatie 'Didactische reader bij de OVSG-toets 2010 – Hoofdrekenen: breek er je hoofd niet over' (OVSG, Brussel, 2010).

4.1.6 Bronnen

Bade J. & Bult H., *De praktijk van interne differentiatie.*Nijkerk, Intro, 1981, 272 p.

Baltussen M., Klep J., & Leenders Y., *Wiskundeavonturen met jonge kinderen.* Amersfoort, CPS

Braams T. & Denis D., Getalbegrip: een noodzakelijke voorwaarde voor het leren rekenen, *Tijdschrift voor Remedial Teaching*, 2003,

Buijs K., Hoe schrijf je dat nou netjes op? Het gebruik van hulpnotaties in het reken-wiskundeonderwijs, *Volgens Bartjens*, *jg 28*, 2008 – 2009, nr. 3, p. 30 - 34

Buijs K. & De Wert P., Houvast bieden… en houden – zwakke rekenaars en meerdere oplossingsmanieren, *Volgens Bartjens*, *jg 26,* 2006 - 2007, nr. 4, p. 8 - 12

Borghouts C. & Buter A., Interactie in de reken-/wiskundeles. *Volgens Bartjens*, *jg 25*, 2005 – 2006, nr. 1, Carbonez M., De Baets F., Govaert E., Tas K., Uten P. & Van Iseghem H., *Wiskundewijzer voor het lager onderwijs.* Wommelgem, Van In, 2008, 247 p.

Deckers M. & Aerts R., *Kinderen rekenen – rekendidactiek voor de lagere school.* Mechelen Wolters Plantyn-professionele informatie, 2005, 218 p.

Danhof W., Bandstra P., Milo B., Mushati-Hamadani E., Minnaert A. & Ruijssenaars W., Onderzoeksproject leerbaarheid van hoofdrekenen, *Panamapost*, *jg 27,* nr. 2, zomer 2008, p.24 - 28

Frijlink J. & Wouda H., De rekentoren, realistisch reken-wiskundeonderwijs aan kleuters. *Volgens Bartjens*, *jg 28*, 2008 – 2009,

Gelderblom G., *Effectief omgaan met verschillen in het rekenonderwijs.* Amersfoort, CPS, 2007, 92 p.

Gelderblom G., *Effectief omgaan met zwakke rekenaars*. Amersfoort, CPS, 2008, 130 p.

Goffree F., *Kleuterwiskunde.* Wolters - Noordhoff,

Goorhuis-Brouwer S., Mogen peuters nog peuteren en kleuters nog kleuteren? *De wereld van het jonge kind*, januari 2006

Heuvel-Panhuizen, M. van den, *Schattend rekenen in Kinderen leren rekenen, tussendoelen annex leerlijnen, Hele getallen, bovenbouw Basisschool.* Groningen, Wolters-Noordhoff

Hickendorf M. & Van Putten C.M., Individual differences in strategy use on division problems: mental versus written computation, 2010, *Journal of Educational Psychology*, *Vol. 102*, No. 2, p. 438 - 452

Janssen - Vos F., Pompert B.& Vink H., *Naar lezen, schrijven en rekenen.* Assen, Van Gorcum, 1997 (derde druk), 210 p.

Janssen J., Van der Schoot F. & Hemker B., *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4 – uitkomsten van de vierde peiling in 2004, PPON.* Cito, 240 p.

Leenders Y., Systematisch en planmatig werken aan rekenwiskundige ontwikkeling in de kleuterperiode. *Rekenpilots*, oktober 2009

Luit van J.E.H., De ontwikkeling van tellen en getalbegrip bij kleuters. *Rekenpilots*, 2009

Marzano R.J., Pickering D.J. & Pollock J.E., *Wat werkt in de klas – research in actie – didactische strategieën die aantoonbaar effect hebben op leerprestaties.* Middelburg, Bazalt, 2008, 148 p.

Marzano R.J., *Wat werkt op school, research in actie, meta-analyse van 35 jaar onderwijsresearch direct toepasbaar in beleid en praktijk*. Middelburg, Bazalt, 2007, 160 p.

Ministerie van Onderwijs - directie van het basisonderwijs, *Werken met getallen en met vormen*, vierenveertigste pedagogische week, 1990, 182 p.

Nelissen J. & Van Oers B., *Reken maar! Rekenreflecties op de praktijk, JSW-boek 26.* Baarn, Bekadidacti, 2000

Noteboom A. & Notten C., Hoe kun je spelletjes gebruiken in de rekenles?, *Volgens Bartjens, jg 28*, 2008-2009, nr. 5,

OVSG, *Leerplan wiskunde voor de basisschool.* Brussel, OVSG, 1998, 339 p.

OVSG, *(H)eureka, probleemoplossende vaardigheden binnen wiskunde*, Brussel, OVSG, 2007, 107 p.

Pameijer N., Van Beukering T., Schulpen Y. & Van de Veire H., *Handelingsgericht werken op school, samen met leraar, ouders en kind aan de slag.* Leuven, Acco, 2007, 262 p.

Pameijer N., van Beukering T., de Lange S., Schulpen Y. & Van de Veire H., *Handelingsgericht werken in de klas – de leerkracht doet ertoe!* Leuven/Den Haag, Acco, 2010, 264 p.

PO-Raad, *Projectbureau kwaliteit, Iedereen kan leren rekenen.* Utrecht, 2009, 23 p.

PO-Raad, *Rekenpilots, kwaliteitskaarten rekenen groep 3, rekenen tot en met 100*

PO-Raad, *Rekenpilots, kwaliteitskaarten rekenen groep 3/4, rekenen tot 20*

PO-Raad, *Rekenpilots, kwaliteitskaarten rekenen, zwakke rekenaars in de bovenbouw*

Van Eerde D. & Vuurmans A.C. (red. Nelissen J.M.C.), *Psychologie in het reken/wiskundeonderwijs.* Groningen, Wolters-Noordhoff, 1987, 135 p.

Van Parreren C.F., *Leren op school.* Wolters-Noordhoff, 1976, 101 p.

Van Parreren C.F., *Ontwikkelend onderwijs.* Leuven, Acco, 1988, 170 p.

Van Velzen J., *Kennis en denken en leren.* Antwerpen/Apeldoorn, Garant, 2008, 310 p.

Van Zanten M. & Buijs K., Aandachtspunten voor verbetering van het reken-wiskundeonderwijs – een dubbelinterview met A. Treffers en K. van Putten. *Panamapost, jg 28*, nr. 1, voorjaar 2009, p. 76 - 83

Van Zanten M., Verschillende oplossingsstrategieën variëren of vermijden? *Volgens Bartjens, jg 28*, 2008-2009, nr. 3, p. 4 - 8

Verschaffel L. & De Corte E. (redactie), *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie, deel 2: het fundament van gecijferdheid gelegd.* Leuven, Acco, STOHO (studiecentrum Open Hoger Onderwijs), 1995, 272 p.

Vlaams ministerie van Onderwijs en Vorming, Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Entiteit Curriculum. *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs.* Brussel, 2009, 70 p.

Geraadpleegde websites:

http://www.cito.nl/share/PPON/Cito_pponbalans_32.pdf

http://www.cito.nl/po/ppon/informeert/PPON_krant_Rekenen_11.pdf

http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/5467.pdf

http://www.fi.uu.nl/rekenweb/

http://www.poraad.nl/index.php?p=19641&nieuws_id=357769

http://www.schoolaanzet.nl

http://www.rekenpilots.nl/implementatiekoffer/kwaliteitskaarten

http://www.gork.be

http://www.igean.be

http://www.iok.be

4.2 Breuken in het basisonderwijs en in het secundair onderwijs. Els Van Emelen, Redactie Uitwiskeling

4.2.1 Inleiding

Getallen zijn, zowel binnen als buiten de klasmuren, zo vertrouwd geworden dat we er zelden bij stilstaan. We gebruiken ze om aantallen te tellen en te vergelijken, om berekeningen te maken en om allerlei zaken te meten. Het lijkt alsof ze er altijd geweest zijn. Nochtans zijn ze het resultaat van een lang groeiproces, zowel in de geschiedenis van de mensheid als in de schoolloopbaan van een kind. In deze bijdrage willen we een stuk van dit groeiproces schetsen, namelijk het stuk van het rekenen met breuken in het basisonderwijs en in de eerste graad van het secundair onderwijs. Uit de drie peilingsonderzoeken wiskunde blijkt immers dat leerlingen hier veel moeite mee hebben. We suggereren dat het werken met verschillende modellen leerlingen kan ondersteunen als ze leren werken met breuken.

Deze tekst is grotendeels gebaseerd op een artikel dat eerder verscheen in Uitwiskeling, jaargang 18, nummer 2.

4.2.2 Situatie op het einde van de basisschool

Om de beginsituatie van de leerlingen van het eerste jaar in te schatten, kijken we naar het leerplan van de lagere school. We geven een kort overzicht.

De tekst is gebaseerd op het leerplan van het Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs. Het leerplan van het Gemeenschapsonderwijs komt hiermee in grote lijnen overeen. Wanneer bij een onderdeel een (*) staat, betekent dit, dat het niet in de eindtermen vermeld wordt. De eindtermen zijn de minimale doelstellingen die bereikt moeten worden. Deze zijn voor alle scholen in Vlaanderen dezelfde. De leerplannen van de verschillende onderwijsnetten zijn hierop gebaseerd maar zijn uitgebreider en bevatten meestal meer doelstellingen.

4.2.2.1 Breuken

In de lagere school staan reeds vanaf het derde leerjaar breuken op het programma. Opvallend is het feit dat het leerplan vaak spreekt over werken *met eenvoudige breuken* en in *praktische gevallen* (d.w.z. vertrekkend vanuit een context).

Voor wat betreft getallenkennis, hebben leerlingen kennisgemaakt met een breuk als operator ($\frac{2}{3}$ van een geheel), als getal (plaats op de getallenas) en als verhouding (onder meer als aanduiding voor een kans). Ze hebben eenvoudige breuken leren vergelijken, ordenen, gelijknamig maken en herstructureren ($\frac{9}{4}$ is 2 en $\frac{1}{4}$). Voor $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{6}$ wordt de term 'gelijkwaardige breuken' gebruikt.

Bij de bewerkingen wordt een breuk genomen van een grootheid, een hoeveelheid en een getal. De leerlingen kunnen (ook ongelijknamige) breuken optellen en aftrekken. Ze kunnen eveneens breuken vermenigvuldigen met en (*)delen door een natuurlijk getal (5 x $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}:4$). In het zesde leerjaar maken ze kennis met het (*)vermenigvuldigen van breuken ($\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}$) en met het (*)delen van breuken door stambreuken[29]($\frac{4}{5}:\frac{1}{2}$). Van deze laatste twee onderwerpen wordt slechts een inzichtelijke kennismaking gegeven. Het zijn nog geen verworven vaardigheden.

Een breuk delen door een willekeurige breuk en een natuurlijk getal delen door een willekeurige breuk staan niet op het leerplan.

4.2.2.2 Kommagetallen

Voor getallenkennis worden kommagetallen met hoogstens 3 decimalen vergeleken, geordend en geherstructureerd (0,75 is 0,5 en 0,25; 0,75 is 3 keer 0,25). In eenvoudige en zinvolle gevallen zien de leerlingen de gelijkwaardigheid van breuken en kommagetallen in en kunnen ze breuken naar kommagetallen omzetten en omgekeerd.

Hoofdrekenen met kommagetallen beperkt zich hoofdzakelijk tot eenvoudige gevallen en rekenvoordelen (vermenigvuldigen met 0,5 wordt delen door 2; $0{,}1\times 0{,}3 = 0{,}03$; …).

Bij het cijferen (onder elkaar rekenen) met kommagetallen worden de algoritmes voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen inzichtelijk aangeleerd en ingeoefend.

Kommagetallen en breuken worden eveneens gebruikt in toepassingen en vraagstukken.

Voor het getal π wordt 3,14 als benaderende waarde gebruikt.

[29] een stambreuk is een breuk met teller 1

4.2.2.3 Negatieve getallen

In *concrete situaties* (temperatuur, tijdslijn, lift,…) worden ervaringen opgedaan met negatieve getallen. Deze worden gelezen, geschreven en vergeleken.

Bewerkingen met negatieve getallen worden niet behandeld.

4.2.3 Het breukbegrip laten groeien

In het secundair onderwijs is het breukbegrip niet nieuw voor de leerlingen. Bij het leren werken met breuken wordt meestal vrij snel overgegaan naar een abstract gebruik en naar het rekenen met breuken (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen). Vaak constateren we echter dat het de leerlingen ontbreekt aan voldoende inzicht en dat ze de regels hoofdzakelijk op een mechanische manier toepassen. In deze paragraaf geven we een aantal mogelijkheden om het breukbegrip bij leerlingen te verdiepen zodat ze een beter inzicht krijgen. Een deel van deze materie is reeds in de lagere school behandeld. Nochtans is het geen verloren tijd om een aantal basisinzichten opnieuw op te nemen in de leerstof. Het is niet onze bedoeling om een volledige leerlijn over de aanbreng van breuken uit te werken.

4.2.3.1 Breuken, meer dan een streep tussen twee getallen

Alhoewel het breukbegrip op het eerste gezicht vrij eenvoudig lijkt (verdelen en nemen), zit hier veel meer in verscholen. We vertrekken van een stuk taart, gaan over naar een verhouding, en vormen daaruit een nieuwe soort getallen. Deze aspecten – en nog andere – komen tijdens de lessen over breuken aan bod. Dat die niet voor alle leerlingen even duidelijk zijn, blijkt uit de huiver waarmee vaak over breuken gesproken wordt. Niet iedereen heeft prettige herinneringen aan deze lessen. Dit kan gedeeltelijk verklaard worden doordat vrij snel wordt overgegaan naar bewerkingen met breuken. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een aantal tamelijk eenvoudige regels: teller $\times$teller, noemer $\times$noemer, tellers optellen en noemers behouden, vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk, … Vermits leerlingen ‘het waarom’ vaak niet begrijpen, steken ze hun energie in ‘het hoe’. Ze leren eerder te gehoorzamen aan de regels en het uitvoeren ervan dan dat ze leren beroep te doen op hun inzicht in wiskunde. Dit geeft veel minder voldoening en bevestigt de vooroordelen die er bestaan rond het vak wiskunde.

Om dit te vermijden is het belangrijk om vóór het introduceren van bewerkingen, leerlingen langere tijd de verschillende aspecten van breuken te laten verkennen. Op die manier komen ze tot een beter inzicht in wat een breuk is. Het breuk*begrip* groeit: door verschillende verschijnselen uit het dagelijkse leven waarbij breuken voorkomen te behandelen, door een breuk als operator op een grootheid te laten inwerken, door breukdelen te manipuleren, door verhoudingen te bestuderen, door evenredigheden en maten te bestuderen. Dit gebeurt best voordat we bewerkingen met breuken behandelen. Ook bij het aanbrengen van de bewerkingen met breuken blijft het nodig om breukdelen te manipuleren en zo te werken naar abstractie. Het is hierbij belangrijk dat we van concrete voorbeelden naar abstractere werken. Wanneer het begrip groeit, krijgen de breuken stilaan het statuut van getallen waarmee we kunnen rekenen en die we kunnen ordenen.

4.2.3.2 Verdelen en nemen

Een eerste benadering van breuken, en wellicht de bekendste, is het *verdelen en nemen*. Spontaan denken we hierbij aan taarten en pizza’s die in stukken gesneden worden. Op deze manier kunnen we vanuit eenvoudig verstaanbare verdeelsituaties vertrekken. Hierbij moeten we benadrukken dat er verdeeld moet worden in *gelijke* delen. De noemer geeft weer in hoeveel delen we verdelen en de teller hoeveel we nemen. We laten een breuk inwerken op een grootheid (een cirkel, een rechthoek, een aantal,...). Het resultaat ($\frac{1}{2}$ cirkel, $\frac{3}{4}$ rechthoek) krijgen we door een verdeeloperatie. We laten de breuk opereren op het geheel. We spreken in dit geval over een breuk als operator.

4.2.3.3 Onechte breuken

Een volgende stap zetten we bij de introductie van onechte breuken. Als we drie vijfde van een taart nemen, verdelen we de taart in vijf en nemen we drie delen. Dit zijn twee operaties die elkaar eenvoudig opvolgen. De taart is *het geheel*. Dat we dit zo noemen, maakt de gedachtesprong om meer te nemen dan het geheel moeilijker. Om zeven vijfde te nemen is één taart niet meer voldoende, er zijn er twee nodig. Dit wordt duidelijker voor de leerlingen als we vertrekken van een goede context. (De bakker verkoopt stukken taart. Hij verdeelt elke taart in zes stukken. Ik wil voor mijn verjaardag trakteren. Ik heb acht stukken taart nodig of ik heb acht zesden van een taart nodig. Maak van deze situatie een tekening.) Het taartmodel gebruiken voor het geheel is een extra hindernis omdat het een ronde, volledig afgewerkte eenheid is. We kunnen taarten immers niet tegen elkaar 'plakken'. Daarom is het belangrijk om de voorstelling van een geheel te variëren (een rechthoek, een lijnstuk, een cirkel, een strook, een gewicht, een tijdsduur, …).

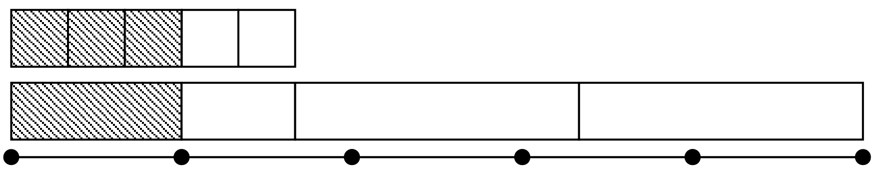
4.2.3.4 Een breuk als een deling gevolgd door een vermenigvuldiging of een vermenigvuldiging gevolgd door een deling

In de vorige paragraaf hebben we een breuk steeds benaderd als een deling gevolgd door een vermenigvuldiging[30]. Bij het volgende probleem kan je ontdekken dat er twee benaderingen mogelijk zijn die hetzelfde resultaat geven. Als we drie repen chocolade willen verdelen over vijf personen, hoeveel krijgt ieder dan?

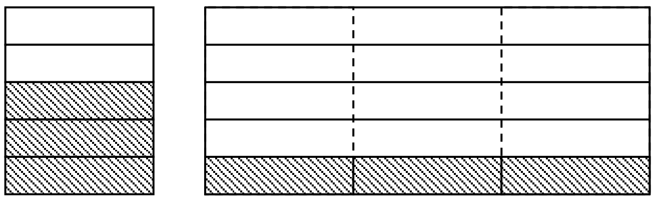
Je verdeelt een reep in vijf en je neemt drie vijfden voor één persoon (een deling gevolgd door een vermenigvuldiging).

Je neemt drie repen (een vermenigvuldiging). Je verdeelt deze nieuwe hoeveelheid in vijf gelijke delen en je krijgt één vijfde deel van deze nieuwe hoeveelheid voor één persoon (een deling).

Het is niet zo eenvoudig om aan te tonen dat *3 vijfden van 1* evenveel is als *1 vijfde van 3*. We kunnen het proberen te verduidelijken met behulp van een strokenmodel.



We vertrekken van één geheel, we verdelen het in vijf gelijke delen en we nemen er drie delen van. Dit vind je terug op het bovenste deel van de figuur. Daarna nemen we datzelfde geheel drie keer. We verdelen dit in vijf gelijke delen en we behouden één vijfde deel. Je kan nu constateren dat de twee gearceerde delen even groot zijn. Toch lijkt het nog wat op gegoochel dat toevallig juist uitkomt. Dit komt omdat de vermenigvuldiging en de verdeling zich in één richting afspelen. Bij een rechthoekmodel komt deze redenering beter tot uiting als we de vermenigvuldiging in de ene richting uitzetten en de deling in de andere.

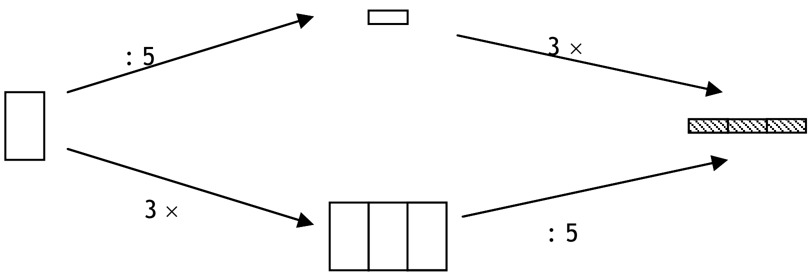


We nemen één grote rechthoek als geheel. We verdelen die in vijf gelijke delen en nemen drie delen (delen door vijf en vermenigvuldigen met drie). Voor de tweede benadering nemen we eerst drie keer het geheel, of vermenigvuldigen we met drie, en dan delen we door 5, of we nemen één vijfde deel.

---

[30] In het volgende deel maken we herhaaldelijk gebruik van het ×-symbool voor de vermenigvuldiging i.p.v. het gebruikelijke punt. We willen hiermee de nadruk leggen op 'het aantal keer' nemen.

Eenmaal de leerlingen begrepen hebben dat beide werkwijzen hetzelfde resultaat opleveren, kunnen we beide denkwijzen abstracter noteren in een volgend schema:



Dit schema kan samengevat worden als '$\frac{3}{5}$ van'. De breuk wordt met andere woorden als vermenigvuldigingsfactor gebruikt:

$$\frac{3}{5} \text{ van } A = \frac{3}{5} \times A = 3 \times (A:5) = (3 \times A):5 .$$

4.2.3.5 Een breuk als verhouding

Het verhoudingsaspect van breuken is veel moeilijker en minder bekend bij leerlingen dan verdelen en nemen. Nochtans voelen ze wel intuïtief verhoudingen aan. De onderstaande figuur laat dit duidelijk zien.

De derde figuur toont een man met een paraplu die duidelijk te groot is, de tweede persoon heeft een paraplu die te klein is en bij de eerste persoon kloppen de verhoudingen. Verhoudingen worden pas moeilijk als we een getal op de verhoudingen willen kleven. Figuren waarbij tussen verschillende 'lengten' een zelfde verhouding bestaat, noemen we 'gelijkvormige' figuren. Als je kijkt naar de volgende figuur dan zie je dat de verhouding tussen de twee hoogtes van de vazen dezelfde is als de verhouding tussen de twee breedtes.

In het volgende deel willen we verhoudingen kenmerken door een getal. We beperken ons hierbij tot eenvoudige voorstellingen (lijnstuk, cirkel, rechthoek, aantal) die ook gebruikt worden om grootheden voor te stellen. Op die manier kunnen we dit later gemakkelijker in verband brengen met breuken.

A	●	C	● ●
B	● ● ●	D	● ● ● ● ● ●

De verhouding tussen A en B is zoals die tussen 1 en 3. Tussen C en D is de verhouding zoals die tussen 2 en 6. We kunnen ook zeggen dat C drie keer in D gaat en zo kan je ook stellen dat de verhouding tussen C en D is als tussen 1 en 3.

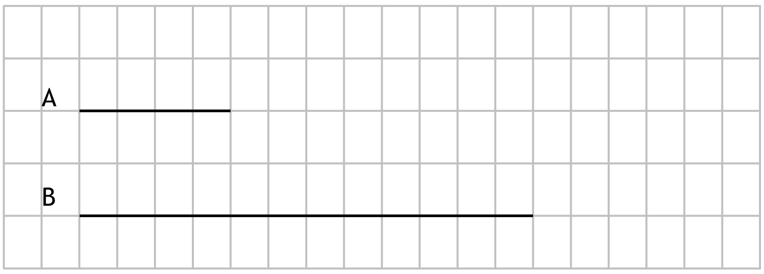
In de volgende figuur verhoudt E zich tot F als 4 tot 10. Maar als we twee punten als één geheel beschouwen, kunnen we ook zeggen dat E zich tot F verhoudt als 2 tot 5. We noemen dit gelijkwaardige verhoudingen.

E ● ● ● ●

F ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

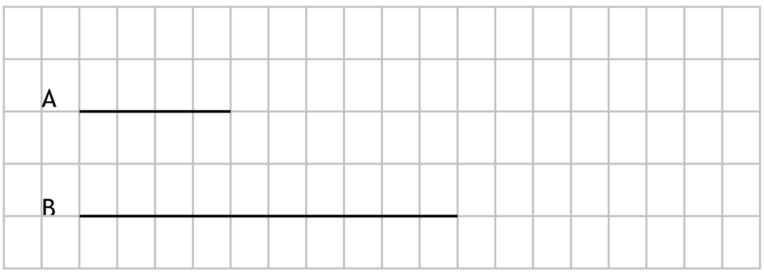
In het dagelijkse leven komen we dit soort situaties, waarbij een verhouding uitgedrukt wordt door twee getallen, ook tegen. Denk maar aan: de jaarlijkse intrest op een kapitaal is 4 procent. Of: de verhouding tussen de intrest en het kapitaal is als de verhouding van 4 en 100. Een ander voorbeeld is het trekken van een kaart uit een spel van 52 kaarten. De kans dat deze kaart een ruiten is, is 13 op 52. Dit voorbeeld illustreert ook een verhouding tussen een deel (de ruiten) en het geheel (de 52 kaarten).

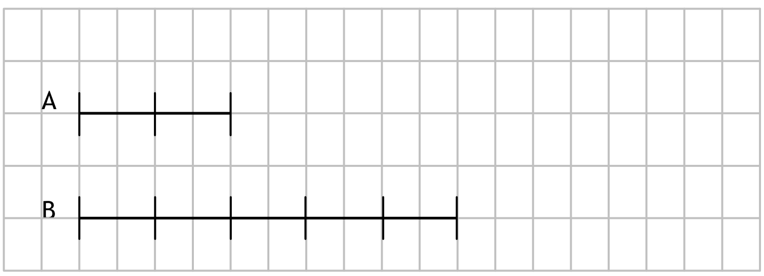
Een gelijkaardige redenering kan opgezet worden over continue grootheden.



Het grote lijnstuk is drie keer zo groot als het kleine of het kleine lijnstuk gaat drie keer in het grote. Het kleine lijnstuk is een derde van het grote. Hierbij wordt de lengte van A als 1 genomen. De verhouding tussen A en B is zoals 1 tot 3.

In een volgende stap kan de lengte van A niet meer genomen worden als eenheid die een geheel aantal keer in B past.





Als je de figuur echter grondiger bekijkt, zie je dat als we A in twee verdelen, we opnieuw een verhouding tussen beide kunnen vinden.

A en B verhouden zich nu als 2 en 5.

Nu we een beter inzicht in de betekenis van een verhouding hebben, kunnen we de stap zetten naar het verband met breuken. Bij breuken ging het steeds over een grootheid (bv. B) en een deel ervan (bv. $\frac{4}{7}$ B). Hoe kunnen we dit in verband brengen met verhoudingen?

Veronderstel dat A en B zich verhouden als 1 en 3 zoals in het eerste voorbeeld van continue grootheden. We kunnen dan B construeren door drie keer A te tekenen en, omgekeerd, A construeren als één derde van B. We krijgen dus:

B = 3 A en $A = \frac{1}{3}$ B.

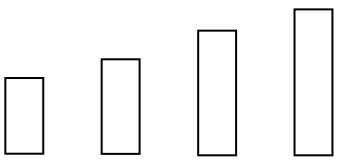
Hierbij wordt telkens gebruik gemaakt van slechts één getal in tegenstelling tot bij een verhouding waarbij twee getallen worden gebruikt. Het wordt iets moeilijker bij het tweede voorbeeld. A en B verhouden zich daar als 2 en 5. We kunnen A construeren door B in vijf te verdelen en dit deel twee keer te nemen. Omgekeerd kunnen we B construeren door A in twee te verdelen en dit deel vijf keer te nemen. Ofwel:

$A = 2 \times (\frac{1}{5}B) = \frac{2}{5}$ B en $B = 5 \times (\frac{1}{2}$ A$) = \frac{5}{2}$ A.

Opnieuw maken we gebruik van slechts één getal, een breuk. Als dit getal en één van de twee grootheden gekend is, is ook de andere grootheid gekend. Een breuk krijgt hier een nieuwe betekenis: naast die van een operator, die we laten inwerken op een grootheid, drukt een breuk hier een verhouding tussen twee grootheden uit.

4.2.3.6 Extraatje: het omgekeerde verband

B is een figuur gevormd door $\frac{5}{4}$ van de hoogte van A te nemen. We kunnen zo een rij van figuren construeren:



A B C D

Bij elke nieuwe rechthoek is de hoogte $\frac{5}{4}$ van de vorige. Hoe kunnen we deze rij uitbreiden naar links?

Het is niet moeilijk om een verhouding, die uitgedrukt wordt door twee getallen, om te keren. Als de verhouding tussen A en B is zoals de verhouding van 3 tot 7, dan is de verhouding tussen B en A als de verhouding van 7 tot 3. Dit wordt niet zoveel moeilijker als er breuken gebruikt worden om de verhouding uit te drukken: als de verhouding van A op B $\frac{3}{7}$ is, wil dit zeggen dat A bestaat uit drie delen en B uit zeven delen. Met deze formulering wordt het omgekeerde verband B op A, de verhouding 7 op 3. De bijbehorende breuk is dan $\frac{7}{3}$.

Het is echter gevaarlijk om te snel zulke uitspraken door leerlingen abstract, zonder tekening of concrete situatie te laten formuleren. We geven enkele voorbeelden van mogelijke uitspraken en waar het mis kan lopen:

Als de verhouding tussen beide grootheden geheel is, zijn er gewoonlijk geen directe problemen: B is drie keer zo groot als A, dan is A drie keer zo klein als B.

B is drie en een halve keer zo groot als A is niet moeilijk om je voor te stellen. Keer je dit om zonder over een context na te denken, dan krijg je: A is drie en een halve keer zo klein als B. En wat zou dit betekenen?

B is een kwart groter dan A, wordt wiskundig ondubbelzinnig vertaald als B = A + $\frac{1}{4}$A. Het omgekeerde hiervan is echter niet: A is een kwart kleiner dan B. Maar we krijgen dan B = $\frac{5}{4}$A dus is A = $\frac{4}{5}$B of A is een vijfde kleiner dan B!

Als toepassing hierop kan je de leerlingen de volgende vraag laten oplossen. Tijdens de koopjesperiode koop ik een broek die oorspronkelijk € 74 kostte. Ik krijg 30 % vermindering. De broek moet echter vermaakt worden. Hiervoor wordt de broek opnieuw 10 % duurder. Heb ik nu meer dan/minder dan/juist 20 % korting gekregen?

4.2.3.7 Gelijkwaardige breuken, gelijkwaardige verhoudingen

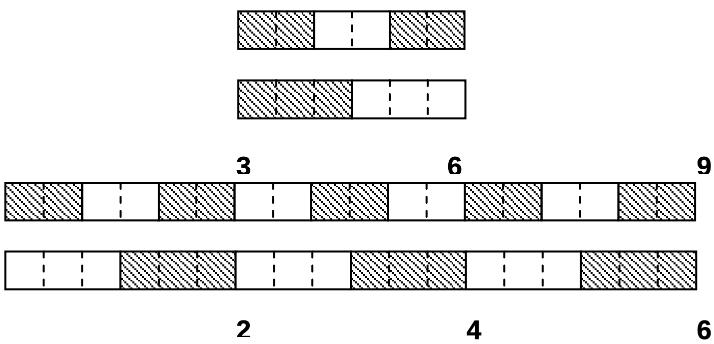
Twee vrienden willen paaseieren uitwisselen. Een klein paasei is € 2 waard, een groot € 3. Ze hebben echter geen euro's ter beschikking en willen enkel ruilen. Het is duidelijk dat 3 kleine eieren evenveel waard zijn als 2 grote. Het gebruik van een verhoudingstabel toont de mogelijke uitwisselingen:

aantal grote eieren	2	4	6	8	10	12	14	16	…
aantal kleine eieren	3	6	9	12	15	18	21	…	

Opmerkelijk is de verwisseling van 2 en 3:

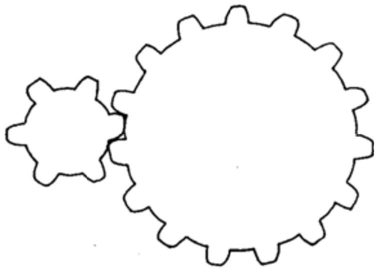
een *klein* ei is € *2* waard, een *groot* ei is € *3* waard,
3 kleine eieren zijn evenveel waard als *2 grote*.

De getallen 2 en 3 verwisselen van plaats. Dit kunnen we geometrisch voorstellen. Een klein ei stellen we voor door een strook van 2 vakjes, een groot door een strook van 3 vakjes. De volgende figuur toont dat 3 strookjes van waarde 2, gelijkwaardig zijn met 2 strookjes van waarde 3, doordat 2 × 3 = 3 × 2.



De figuur kan verder verlengd worden om andere gelijkwaardige verhoudingen te vinden. Deze worden gegeven door die plaatsen waar een hoeveelheid van de kleine eieren overeenkomt met een hoeveelheid van de grote eieren. De verhouding $\frac{3}{2}$ is de eerste die hieraan voldoet. De figuur toont er nog andere, bv. $\frac{6}{4}$ en $\frac{9}{6}$. Ze suggereert er nog oneindig veel andere.

Ook bij tandwielen komen gelijkwaardige verhoudingen voor. We nemen bijvoorbeeld een klein tandwiel met 6 tanden en een groot tandwiel met 15 tanden.



Een omwenteling van het grote wiel verhoudt zich tot een omwenteling van het kleine wiel als 15 tot 6. Dit betekent dat als het grote tandwiel een tand vooruit gaat, het $\frac{1}{15}$ van een omwenteling maakt. Als het kleine tandwiel een tand vooruit gaat, maakt het $\frac{1}{6}$ van een omwenteling. Als het kleine tandwiel een volledige omwenteling maakt, gaat ze 6 tanden vooruit. Het grote tandwiel gaat dan ook 6 tanden vooruit, d.w.z. $\frac{6}{15}$ van een omwenteling. Als het grote tandwiel een volledige omwenteling maakt, gaat het 15 tanden vooruit. Het kleine tandwiel gaat dan ook 15 tanden vooruit, d.w.z. $\frac{15}{6}$ van een omwenteling of twee volledige omwentelingen en nog drie tanden, of twee en een halve omwenteling.

Als we het kleine tandwiel volledige omwentelingen laten maken, wanneer maakt dan ook het grote tandwiel volledige omwentelingen?

Hiervoor stellen we een tabel op:

aantal omwentelingen van het kleine tandwiel	1	2	3	4	5	6
aantal tanden van het kleine tandwiel	6	12	18	24	30	36
aantal tanden van het grote tandwiel	6	12	18	24	30	36
aantal omwentelingen van het grote tandwiel	$\frac{6}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{18}{15}$	$\frac{24}{15}$	$\frac{30}{15}$	$\frac{36}{15}$

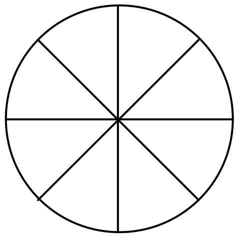
Om de vraag op te lossen, zoeken we het eerste veelvoud van 15 in de rij 6, 12, 18,… Of wiskundig gezegd: we zoeken het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van 6 en 15. Dat is 30. Dus als het kleine wiel 5 omwentelingen maakt, maakt het grote er 2.

4.2.4 Rekenregels aanbrengen en inoefenen: optellen en aftrekken

We brengen de rekenregels voor breuken zoveel mogelijk via inzicht aan. We werken hierbij telkens met een schematische voorstelling die de gedachtengang verklaart. Vaak vertrekken we van eenvoudige en duidelijke voorbeelden. Het is niet de bedoeling dat de leerlingen voor alle mogelijke breuken deze rekenregels schematisch kunnen verklaren, maar wel dat ze de schematische verklaringen als geheugensteuntje gebruiken om met inzicht de rekenregels te kunnen onthouden en gebruiken.

Zowel de optelling als de aftrekking van breuken is herhaling voor de leerlingen van de eerste graad. Aan de hand van enkele korte oefeningen kan de regel worden opgefrist. Schematische voorstellingen ondersteunen het inzicht in de regel. We geven enkele voorbeelden voor de optelling, de aftrekking verloopt analoog. Merk op dat het geheel niet altijd op dezelfde manier voorgesteld wordt (cirkel, aantal, strook,…) zodat leerlingen ervaren dat de regel onafhankelijk is van de gekozen schematische voorstelling. De volgende gevallen kunnen best aan bod komen.

Gelijknamige breuken: $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=?$



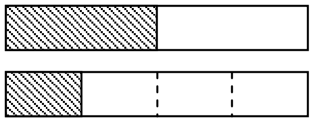
Bij het optellen verandert het aantal delen waarin het geheel verdeeld is niet. Daarom blijft de noemer dezelfde. Het aantal delen dat genomen wordt, verandert wel. Dit vind je terug in de teller.

Gelijknamige breuken waarbij het resultaat een onechte breuk is (de teller is groter dan de noemer): $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=?$

●●●○○

●●●●○

Ongelijknamige breuken: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=?$



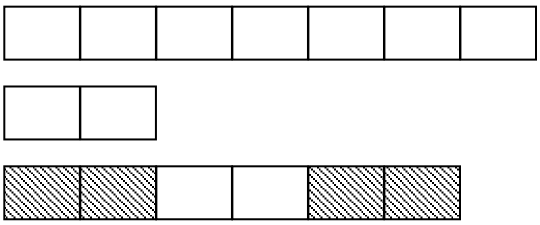
Optellen kan maar als de twee breuken gelijknamig gemaakt worden. Daarna kan gewoon de bovenstaande regel toegepast worden.

4.2.5 Rekenregels aanbrengen: vermenigvuldigen van breuken

4.2.5.1 Een natuurlijk getal vermenigvuldigen met een breuk

Ook dit hebben de leerlingen reeds geleerd in de lagere school. Het inzicht in de vermenigvuldiging wordt bevorderd door het vermenigvuldigingsteken te lezen als ‘keer’. Op die manier beseffen ze beter dat het hier gaat om een herhaalde optelling.

voorbeeld: $3\cdot\frac{2}{7}=?$



Het geheel wordt in zeven gelijke delen verdeeld. We nemen hiervan twee delen. Deze twee delen nemen we drie keer .

We noteren onze denkwijze:

$$3\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 2}{7}$$

Besluit:

Om een breuk te vermenigvuldigen met een getal, vermenigvuldigen we de teller van de breuk met dit getal en behouden we de noemer.

4.2.5.2 Een breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal

Dit is nog steeds leerstof van de lagere school. Het sluit aan bij het gebruik van een breuk als operator. We zeggen immers:

$\frac{3}{4}$ van 12 $=\frac{3}{4}\cdot 12$

4.2.5.3 Een breuk vermenigvuldigen met een breuk

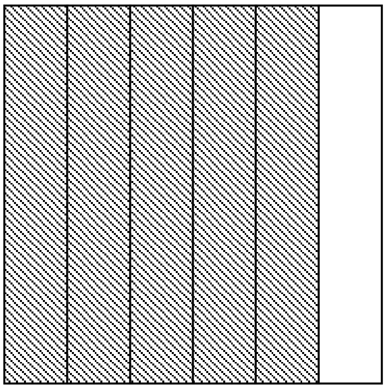
Dit onderwerp staat niet in de eindtermen van het basisonderwijs, maar sommige handboeken nemen dit wel op. In de eerste graad van het secundair onderwijs mag er zeker niet van uit gegaan worden dat dit geautomatiseerd is. Het is dus belangrijk dat dit inzichtelijk wordt aangebracht.

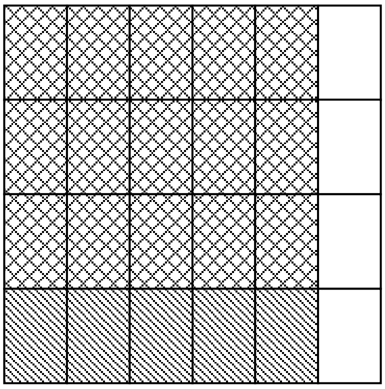
Voorbeeld: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = ?$

Een eerste stap is een betekenis aan deze opgave te geven. Deze uitdrukking kan niet betekenisvol gelezen worden als “drie vierde keer vijf zesde”. Uit vroegere lessen over breuken weten leerlingen dat een vermenigvuldiging waarvan het eerste getal bestaat uit een breuk, kan gelezen worden als “drie vierde van vijf zesde”. Als we dit op deze wijze lezen, kan er wel een betekenisvolle situatie aan vastgeknoopt worden.

We redeneren op een figuur. We vertrekken van een vierkant en nemen $\frac{5}{6}$ van dit vierkant (figuur links).

Vervolgens nemen we $\frac{3}{4}$ van het gearceerde stuk of $\frac{3}{4}$ van $\frac{5}{6}$ (zie figuur rechts).





Eerst deelden we de figuur op in 6 stroken. Elk van deze stroken deelden we nadien verder op in 4 rechthoekjes. Zo kregen we 24 (= 4 · 6) rechthoekjes. De noemer van het resultaat kunnen we dus vinden door de noemers van de oorspronkelijke breuken met elkaar te vermenigvuldigen. We namen 5 stroken en per strook namen we 3 rechthoekjes. We kregen 15 (= 3 · 5) rechthoekjes. De teller van het resultaat kunnen we dus vinden door de tellers van de oorspronkelijke breuken met elkaar te vermenigvuldigen. Samengevat wordt dit:

$\frac{3}{4}$ van $\frac{5}{6}$ is $\frac{15}{24}$ van het totaal of $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$

Na een aantal inzichtelijke oefeningen wordt de regel geformuleerd:

Om twee breuken met elkaar te vermenigvuldigen, vermenigvuldigen we de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

4.2.6 Rekenregels aanbrengen en inoefenen: delen van breuken

4.2.6.1 Verdelingsdeling en verhoudingsdeling

Delen kan je op twee manieren bekijken. Neem bijvoorbeeld de deling 6 : 3 = 2. Een eerste manier om deze opgave op te lossen is door te *verdelen*. Dit wordt de *verdelingsdeling* genoemd. Ik verdeel zes knikkers over drie leerlingen. Ik deel een eerste keer uit:

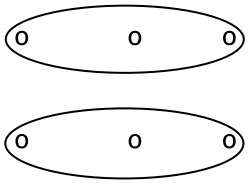
L_1	L_2	L_3
o	o	o

Ik heb nog knikkers over en dus verdeel ik een tweede keer:

L_1	L_2	L_3
o o	o o	o o

Om het resultaat te vinden, tel ik hoeveel knikkers elke leerling krijgt. Dit zijn er twee. Bij de verdelingsdeling tellen we *het aantal elementen per groep*.

Een tweede manier om deze opgave op te lossen is door na te gaan hoe vaak *3 in 6* gaat. Dit wordt de *verhoudingsdeling* genoemd.



1 keer

2 keer

Het resultaat is, gelukkig maar, opnieuw 2. Voor de verhoudingsdeling tel ik *het aantal groepjes van 3* dat gevormd kan worden. Het verband tussen de eerste berekeningswijze en de tweede kan je als volgt verklaren: je telt het aantal keer dat je 3 knikkers hebt kunnen uitdelen. Dit moet gelijk zijn aan het aantal knikkers dat ieder gekregen heeft. Het voordeel van de verhoudingsdeling is, dat die veel efficiënter is om mee te werken.

Afhankelijk van de context wordt de ene keer een verdelingsdeling en de andere keer een verhoudingsdeling gebruikt. De verdelingsdeling is voor de leerlingen degene die het meest aansluit bij hun dagelijkse leven. Maar beide zijn aan bod gekomen in de lagere school.

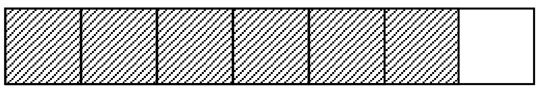
4.2.6.2 Een breuk delen door een natuurlijk getal

Dit is herhalingsleerstof uit de lagere school. We brengen twee verschillende regels aan.

1) De teller is een veelvoud van het natuurlijk getal, bv. $\frac{6}{7}:3=$ **?**

Er is $\frac{6}{7}$ van een reep chocolade over. We verdelen dit eerlijk over drie leerlingen. Welk deel krijgt elke leerling?

We tekenen het geheel. Daarna kleuren we wat overblijft van de reep grijs.



We hebben dus zes van de zeven delen. Die moeten we verdelen in drie gelijke delen. Elke leerling krijgt twee zevende.

$$\frac{6}{7}:3=\frac{2}{7}=\frac{6:3}{7}$$

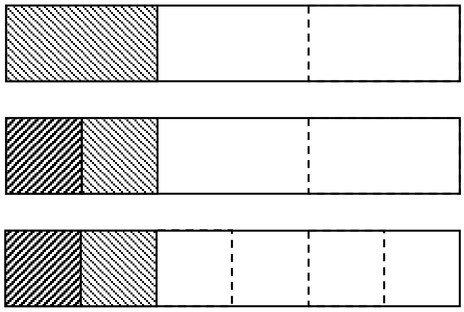
We stellen vast dat het aantal delen waarin het geheel verdeeld was (de noemer) niet verandert. Het aantal delen dat we krijgen na de verdeling (de teller), is wel veranderd. Na enkele oefeningen kan de regel geformuleerd worden:

Om een breuk te delen door een natuurlijk getal, delen we de teller van de breuk door dat getal en behouden we de noemer.

2) De teller is geen veelvoud van het natuurlijk getal, $\frac{1}{3}:2=$ **? ,** $\frac{3}{4}:5=$ **?**

Voorbeeld 1: An heeft $\frac{1}{3}$ van een reep chocolade over en verdeelt dit eerlijk tussen zichzelf en haar vriendin. Welk deel van de reep krijgt zij?

We lossen de opgave '$\frac{1}{3}:2=?$' op. Hiervoor tekenen we een strook die de reep chocolade voorstelt. Het deel dat over is, arceren we.



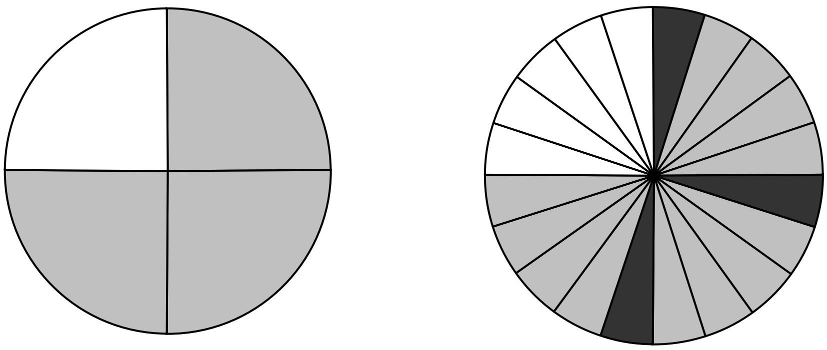
An verdeelt dit stuk tussen zichzelf en haar vriendin. Ze krijgt de helft. We passen de verdelingsdeling toe. Dit deel kan zes keer in het oorspronkelijk geheel. Hier passen we de verhoudingsdeling toe. Ze krijgt dus $\frac{1}{6}$ van het geheel.

Dus:

$$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$$

Voorbeeld 2: $\frac{3}{4}:5=$?

We nemen als geheel een cirkel. Van deze cirkel werken we met $\frac{3}{4}$.



Deze $\frac{3}{4}$ moeten we in 5 verdelen. Het *aantal* delen (3) kunnen we niet delen door 5. We kiezen daarom voor een andere strategie. We delen elk vierde in 5 gelijke delen. Per vierde krijgen we zo één klein deeltje. Vermits we 3 vierde hadden, maakt dat in totaal drie kleine deeltjes. Eén klein deeltje gaat 4 keer 5, of 20 keer, in het geheel. Of het is $\frac{1}{20}$-ste deel van het geheel. Samen maakt dit $\frac{3}{20}$ van de totale cirkel.

Dus:

$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$$

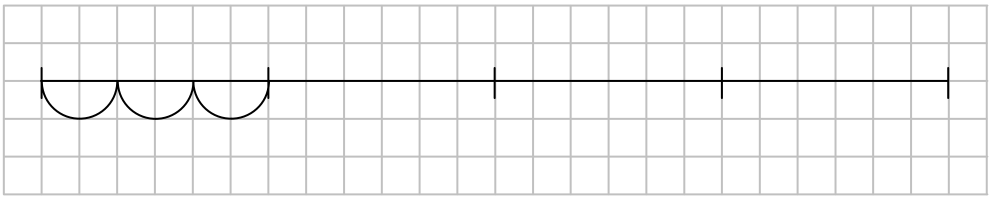
Na enkele oefeningen kunnen de leerlingen op zoek gaan naar de wetmatigheid in de voorbeelden. Ze kunnen dan zelf de regel vinden:

Om een breuk te delen door een getal, vermenigvuldigen we de noemer van de breuk met dat getal en we behouden de teller.

4.2.6.3 Een natuurlijk getal delen door een stambreuk

Dit onderwerp behoort niet tot de eindtermen van het lager onderwijs. Deze bewerking is dus zeker niet geautomatiseerd op het einde van het lager onderwijs.

We hebben een lint van 4 meter. We willen dit lint verdelen in stukken van $\frac{1}{3}$ meter. Hoeveel stukken kunnen we maken?



We lossen de deling $4:\frac{1}{3}=$ op. We tekenen hiervoor het lint van 4 meter.

We gebruiken hier de verhoudingsdeling. We gaan met andere woorden na hoe vaak een lint van $\frac{1}{3}$ meter in 4 meter gaat. Uit 1 meter kunnen we 3 stukken knippen van $\frac{1}{3}$ meter. Uit 4 meter kunnen we vier keer zoveel stukken knippen, dus $4 \cdot 3$ stukken of 12 stukken.

Besluit:

$$4:\frac{1}{3}=4\cdot 3=12$$

De leerlingen maken een aantal gelijkaardige oefeningen. De besluiten worden bij elkaar genoteerd. Hieruit kunnen ze zelf de regel afleiden:

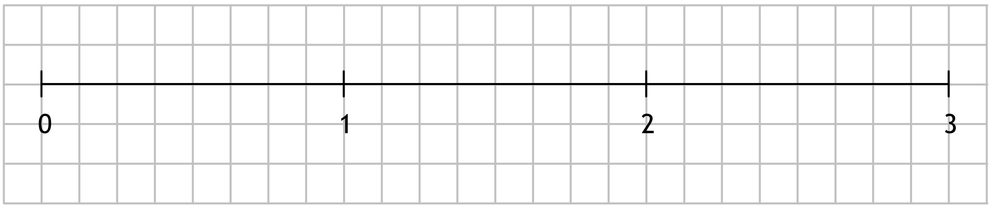
Om een natuurlijk getal te delen door een stambreuk, vermenigvuldigen we het getal met de noemer van de stambreuk.

Het afleiden van deze regel lijkt vrij evident. Nochtans is het inzicht in de werkwijze heel belangrijk voor de volgende twee rekenregels. Die berusten op hetzelfde principe. Daarom is het nodig dat leerlingen goed beseffen dat *delen door een getal, nagaan is, hoe vaak dit getal in het andere getal gaat*. Het is m.a.w. essentieel dat ze de verhoudingsdeling goed begrijpen.

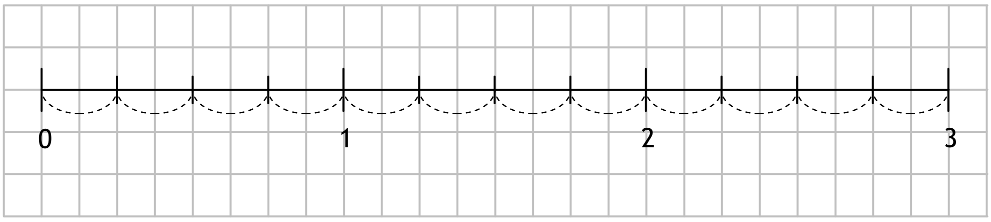
4.2.6.4 Een natuurlijk getal delen door een willekeurige breuk

Ook deze leerstof is nieuw in het secundair onderwijs.De volgende oefeningen zijn, zoals je wel zal merken, niet willekeurig gekozen. We kozen ze met opzet zo, dat gemakkelijk op de figuur geredeneerd kan worden en het resultaat duidelijk afleesbaar is op de figuur. Om er voor te zorgen dat de leerlingen via een schematische voorstelling een resultaat vinden, moet de breuk best een geheel aantal keren in het natuurlijk getal gaan. Het is de bedoeling om, op een inzichtelijke manier, de leerlingen een regel te laten vinden. Een moeilijker geval (bv. $5:\frac{3}{2}=$) kan, eventueel nadat de regel gevonden is, een keer geverifieerd worden. Het is geen doelstelling om de leerlingen systematisch oefeningen op deze manier te laten oplossen. Nadat de regel gekend en begrepen is, kunnen ze deze toepassen.

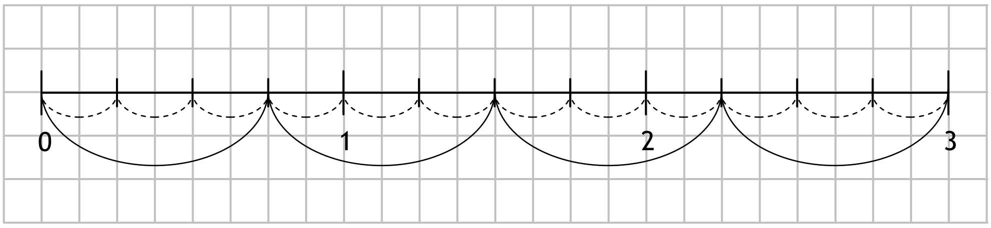
We werken het voorbeeld '$3:\frac{3}{4}=?$' uit. We tekenen de gehelen.



In de vorige paragraaf hebben we geleerd hoeveel $3:\dfrac{1}{4}$ is. We weten met andere woorden hoe vaak $\frac{1}{4}$ in 3 gaat. We duiden dit aan op de figuur.



In een volgende stap duiden we op de figuur aan hoeveel keer $\dfrac{3}{4}$ in 3 gaat. Of we zoeken aan de hand van de figuur hoeveel $3:\dfrac{3}{4}$ is.



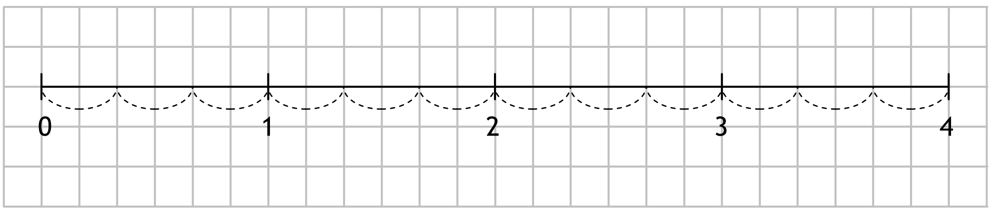
$\dfrac{1}{4}$ gaat 12 keer in 3. $\dfrac{3}{4}$ is drie keer zo groot. $\dfrac{3}{4}$ gaat dan maar $\dfrac{1}{3}$ van het aantal (12) keren in 3, m.a.w. we moeten 12 delen door 3.

We besluiten:

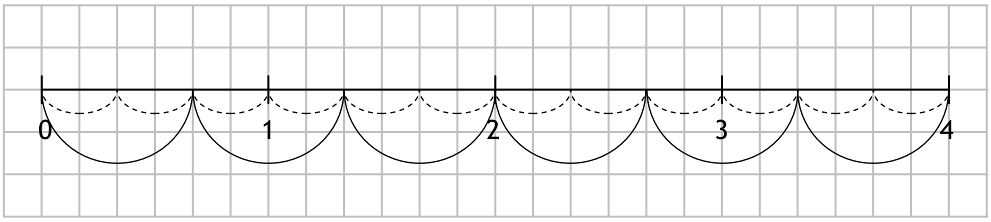
$$3:\frac{3}{4}=(3:\frac{1}{4}):3=(3\cdot 4):3=\frac{3\cdot 4}{3}$$

We werken nog een voorbeeld uit: $4:\dfrac{2}{3}=?$

We tekenen de gehelen en gaan na hoeveel $4:\dfrac{1}{3}$ is. Dit komt neer op het zoeken hoe vaak $\dfrac{1}{3}$ in 4 gaat (12). De volgende figuur illustreert dit.



We duiden nu op de figuur aan hoeveel keer $\dfrac{2}{3}$ in 4 gaat. Dit komt neer op het zoeken, aan de hand van de figuur, hoeveel $4:\dfrac{2}{3}$ is.



$\frac{1}{3}$ gaat 12 keer in 4. $\frac{2}{3}$ is twee keer zo groot. $\frac{2}{3}$ gaat dan half zoveel keer in 4 m.a.w. 12 delen door 2.
We besluiten:

$$4:\frac{2}{3}=(4:\frac{1}{3}):2=(4\cdot 3):2=\frac{4\cdot 3}{2}$$

Als algemene regel besluiten we:

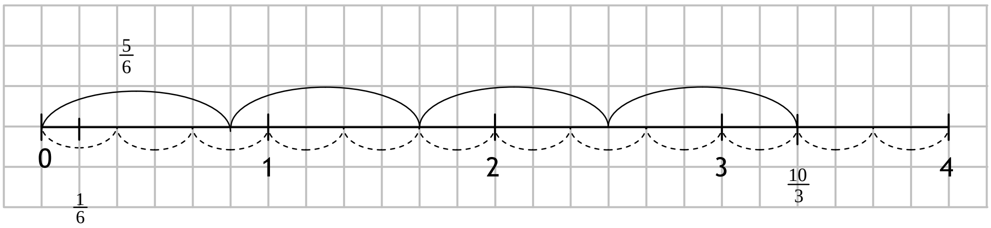
Om een getal te delen door een breuk vermenigvuldigen we dit getal met de omgekeerde breuk.

4.2.6.5 Een breuk delen door een breuk

Bij dit onderdeel, dat niet tot de eindtermen van het lager onderwijs behoort, is het enige nieuwe element dat het eerste getal een breuk is, terwijl dit vroeger een natuurlijk getal was. We onderzoeken of de vroeger gevonden regel geldig blijft.

We checken dit voor het voorbeeld: $\frac{10}{3}:\frac{5}{6}=$

Hiervoor gaan we, op de ondertussen bekende manier, na hoe vaak $\frac{5}{6}$ in $\frac{10}{3}$ gaat.



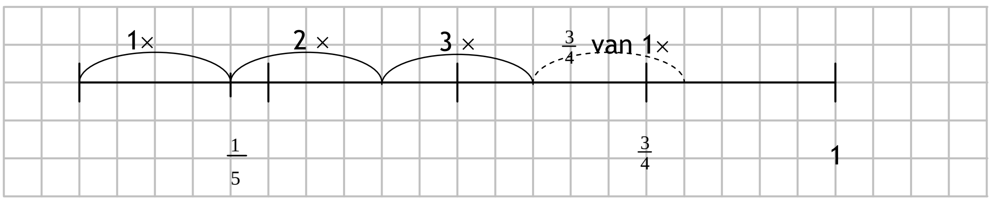
Uit wat we op de tekening kunnen waarnemen, blijkt dat de regel die we reeds kenden, behouden blijft.
We vinden immers:

$$\frac{10}{3}:\frac{5}{6}=4=\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{5}$$

We formuleren de regel:

Om een breuk te delen door een breuk, vermenigvuldigen we de eerste breuk met het omgekeerde van de tweede breuk.

et behulp van een tekening kunnen leerlingen nagaan dat de gevonden regel ook geldt voor bv.
$\frac{3}{4}:\frac{1}{5}=\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$.



4.2.7 Afsluitende gedachte

Dit artikel focuste op het inzichtelijk laten groeien van het breukbegrip en bewerkingen met breuken, vanuit modellen. In principe hebben leerlingen op het einde van het basisonderwijs het optellen en aftrekken van breuken al geautomatiseerd. Voor het vermenigvuldigen en delen zijn aanzetten gegeven maar mag er, als leerlingen in het secundair onderwijs aankomen, zeker niet vanuit gegaan worden dat dit parate kennis is. Het is belangrijk om deze leerstof inzichtelijk op te nemen en pas te automatiseren als leerlingen voldoende inzicht verworven hebben. Bij rekenproblemen kan het aangeraden zijn om terug te keren naar de modellen, ook de modellen die gebruikt werden in de lagere school (bij optellen en aftreken van breuken) en die leerlingen al verworven zouden moeten hebben.

4.2.8 Bronnen

Rouche, N. (1998), *Pourquoiont-ils inventé les fractions*, Paris: Ellipses

Gielis, T. (1998), *Breuken, rationale getallen*, Hasselt: KHLim

Aerts, R., Deckers, M (1989), *Kinderen rekenen*, Leuven: Acco

Von den Steinen, J. (1996), Einstiege in die Bruchrechnung, bespreking in *Uitwiskeling* 12/3, 32-34

Lagerwerf, B. (1994), *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*, Groningen: Wolters Noordhoff (Groningen)

Van Emelen, E, Roelens, M., Willems, J. (2002), Getallen, een begin zonder einde, *Uitwiskeling* 18/2, 11-50

V - Toenemende abstractie van 6 tot 14

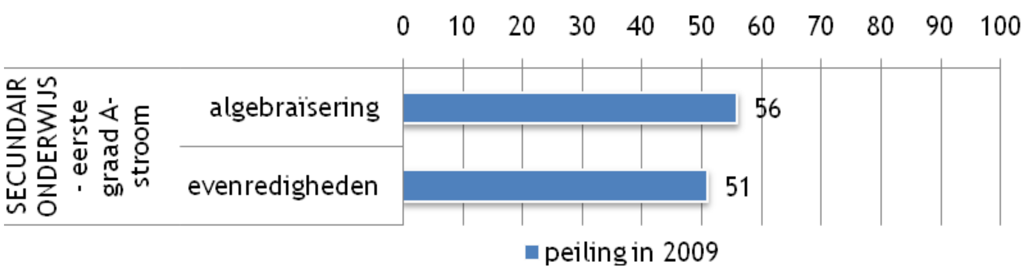
Wiskundeonderwijs begint vroeg: als kleuters voorwerpen in gelijke groepjes verdelen, als zij vergelijken en ordenen, als zij patronen herkennen met vormen en kleuren doen zij wiskundige activiteiten. Kleuters worden op de kleuterschool aangemoedigd om hun handelen te verwoorden. In de lagere school wordt dit verder gezet en uitgebreid. Leerlingen leren patronen zien en verwoorden, zij leren hun waarnemingen veralgemenen en beginnen geleidelijk te abstraheren. Vaak gebeurt dat in een informele taal. Leerlingen krijgen in het lager onderwijs ook al aanzetten tot symbolische notaties. In de eerste graad van het secundair onderwijs leren ze ook om met symbolen formules op te stellen en om deze symbolen ook te manipuleren. De taal die van de leerlingen verwacht wordt, is formeler: de taal van algebra.

Een aantal aspecten van abstrahering zijn al besproken in hoofdstuk 4: het rekenen met veeltermen, merkwaardige producten, oplossen van vergelijkingen… Onderwerpen die Kieran (2004) plaatst onder de noemer ‘transformeren’. In dit hoofdstuk wordt de nadruk gelegd op een andere algebraïsche activiteit: het generaliseren. Voorbeelden van generaliseren zijn letters gebruiken als middel om te veralgemenen en regelmaat omschrijven met formules. Het generaliseren kan volgens Kieran vanuit twee raamwerken betekenis krijgen: vanuit de idee van ‘functie’ en vanuit de idee van ‘veralgemeende rekenkunde’. Dit wordt verder uitgewerkt in dit hoofdstuk.

Inhoudstafel

1 Peilingsresultaten

Hieronder staan de resultaten op peilingstoetsen ‘evenredigheden’ en ‘algebraïsering’ van de A-stroom van de eerste graad. Het zijn de enige toetsen waarin eindtermen aan bod kwamen met een graad van abstractie. Met beide toetsen had bijna de helft van de leerlingen problemen. De bijlage bevat een volledig overzicht van de eindtermen en ontwikkelingsdoelen in de drie afgenomen peilingen.



Figuur 5.1 Peilingsresultaten voor twee toetsen uit de Vlaamse peilingen in de eerste graad van het secundair onderwijs (A-stroom)

In de toets over evenredigheden waren de drie getoetste eindtermen bij meer dan een derde van de leerlingen nog niet in de klas behandeld. Tabel 5.1 geeft hier een overzicht van. Wat maakt dat heel wat leerkrachten niet toekomen aan dit onderwerp? Zijn ze zich voldoende bewust van het belang van deze eindtermen over evenredigheden in de leerlijn naar functies?

Tabel 5.1 Percentage leerlingen per optiegroep en in de totale steekproef waarbij op 27 mei 2009 eindtermen uit deze peilingstoets nog niet werden behandeld in de lessen wiskunde

Eindtermnummer	klassieke talen	moderne wetenschappen	technische opties	totale steekproef
Evenredigheden				
ET 16	39	29	40	**35**
ET 24	41	32	45	**39**
ET 39	39	31	42	**36**

2 Reflectie over de resultaten door AKOV

2.1 Worden de resultaten bevestigd door andere bronnen?

2.1.1 Informatie uit Nederland

Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) erkennen dat algebra niet eenvoudig is, niet om te leren en niet om te onderwijzen. Dit heeft onder andere te maken met de overgangen van concreet naar abstract en van informele naar formele omschrijvingen.

2.1.2 Toenemende abstractie bekeken door een historische bril

Sfard (1995) onderkent verschillende fasen in de geschiedenis van de algebra. In de eerste fase, die van de retorische en verkorte (syncopische) algebra, werden berekeningen omschreven in woorden of in een mengeling van woorden en symbolen. Omdat de onderzochte berekeningsprocessen complexer werden, groeide de nood aan andere notaties waarmee efficiënter gewerkt kan worden. Dit leidde uiteindelijk in de 16de eeuw tot het ontstaan van de symbolische algebra en het concept ‘variabele’.

Uit onderzoek van Sfard bij leerlingen van 14 tot 17 jaar blijkt dat zelfs leerlingen die al jaren met symbolische algebra werken, beter presteren met verbale dan met symbolische methoden.

2.2 Wat zijn mogelijke verklaringen voor problemen rond toenemende abstractie?

2.2.1 Onderbroken leerlijn volgens de Waalse onderwijsinspectie

De Waalse onderwijsinspectie (Godet, 2010) stelt in haar verslag dat er eerder een breuk dan een overgang is tussen basisonderwijs en secundair onderwijs. De onderwijsinspectie vergelijkt de aanpak in het wiskundeonderwijs met het bouwen van een muur, waarbij elk jaar bakstenen aan de muur worden toegevoegd. Leerkrachten vinden het niet erg als een gedeelte van de muur in een bepaald jaar niet kan behandeld worden, als dat leerstof is die in een volgend jaar ook op het programma staat. Zo worden volgens de inspectie kansen op herhaaldelijk inslijpen van de leerstof gemist. Maken de Vlaamse wiskundeleerkrachten in de eerste graad eenzelfde redenering bij het onderwerp ‘evenredigheden’? Stellen ze de behandeling van dit onderwerp uit tot op het einde van het tweede leerjaar omdat in de tweede graad eerstegraadsfuncties op het programma staan?

2.2.2 Betekenisloze abstrahering

Een moeilijkheid bij het leren van algebra is volgens Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) de overgang van concreet naar abstract. Bij het abstraheren vindt de overgang plaats van het grondniveau (de concrete context) naar het eerste niveau (de overstijgende wereld van algebraïsche objecten en operaties). Die oorspronkelijk abstracte algebrawereld moet voor de leerlingen een betekenisvolle 'realiteit' worden, die daarnaast ook functioneert bij het oplossen van concrete problemen.

Uit onderzoek van Sfard (1995) blijkt dat de meerderheid van de leerlingen algebraïsche uitdrukkingen ziet als betekenisloze symbolen die beantwoorden aan willekeurig vastgelegde transformaties. Deze leerlingen zien geen verband tussen algebraïsche uitdrukkingen en rekenkunde. Ze kunnen dus ook niet terug naar de betekenis van de symbolen die de abstrahering vooraf gaat. Bovendien leidt het gebrek aan logische fundering tot weerstand tegen abstracte uitdrukkingen. Volgens Sfard is de taal van de algebra voor de meerderheid van de leerlingen leeg, enkel syntaxis.

2.2.3 Informeel of formeel

Volgens Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) zijn er in de wiskunde van het secundair onderwijs problemen met het formaliseren. Formaliseren heeft twee aspecten. De aanpak van problemen wordt gesystematiseerd en gestandaardiseerd en daardoor breder toepasbaar, en de procedure wordt genoteerd in de algebra-taal en de bewerkingen gehoorzamen aan de grammaticale regels van de algebra (die vaak weinig betekenis hebben voor de leerling). Formalisering heeft een aantal voordelen. Complexe situaties worden compact weergegeven. Bovendien is een geformaliseerde methode gemakkelijker toe te passen en te automatiseren, voor die leerlingen die dit aankunnen.

Leerlingen gebruiken echter vaak een tussenstap: het preformele niveau. In het onderwijs wordt formalisering vaak geforceerd zonder dat ze zich op natuurlijke wijze kan ontwikkelen. Hierdoor heeft de formele aanpak geen basis waarop de leerling kan terugvallen. Aan de andere kant mag formalisering ook niet nodeloos uitgesteld worden. Het is moeilijk hier een evenwicht in te vinden. Een concreet voorbeeld van hoe leerlingen op verschillend niveau toch correcte antwoorden kunnen geven, volgt in de volgende paragraaf.

2.3 Wat kan er aan problemen rond toenemende abstractie gedaan worden?

2.3.1 Spiraalvormige opbouw

De onderwijsinspectie van de Waalse gemeenschap pleit in haar rapport (Godet, 2010) voor een spiraalvorm in het wiskundeonderwijs: verschillende wiskundeconcepten moeten door de jaren heen verrijkt en progressief geabstraheerd worden. De inspectie pleit ervoor om, voor de essentiële procedures en concepten, te omschrijven wat op elk moment van de schoolloopbaan verwacht wordt, onder andere op het niveau van abstractie en automatisering. De Waalse inspectie meldt dat op dit moment wiskunde in Wallonië een selectiefunctie heeft. Een geleidelijkere opbouw kan van wiskunde terug een instrument van emancipatie maken dat het volgens de inspectie kan en moet zijn.

2.3.2 De eerste stappen in het basisonderwijs

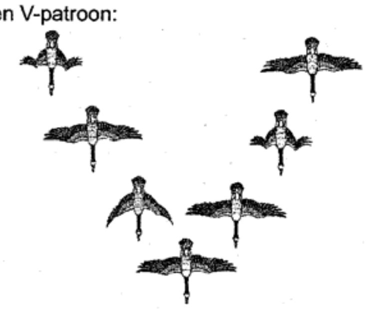
2.3.2.1 Algebraïsch denken in Nederland

Dekker en Dolk (2006) raden aan om in het basisonderwijs te starten met activiteiten die gericht zijn op het ontwikkelen van algebraïsch denken. Dat kan de overgang van rekenen naar algebra in het secundair onderwijs vergemakkelijken. Op dit moment komen in het basisonderwijs in Nederland al onderwerpen en opgaven voor die zich lenen tot algebraïsch denken. Doordat deze opgaven geïsoleerd worden aangeboden, worden ze vaak niet gemaakt in de klas. Als ze wel gemaakt worden, is er geen ruimte voor algebraïsche activiteit: generaliseren (Geldt dat altijd? Hoe weet je dat?), abstraheren (losmaken van de context), formaliseren (gebruik van formules en symbolen). Dekker en Dolk geven een aantal tips die ervoor kunnen zorgen dat leerlingen geen regeltjes uit het hoofd leren, maar algebraïsch leren denken. Leerkrachten moeten opdrachten aanbieden die leerlingen de kans geven hun eigen wiskundige begrippen op te bouwen, uit te breiden en te generaliseren. Dekker en Dolk pleiten ook voor een serie opdrachten waarin een opbouw zit. Opdrachten waaraan op verschillende niveaus kan gewerkt worden (informele, preformele en formele algebraïsche denkmodellen en methoden), spelen hierbij een belangrijke rol.

Dekker en Dolk leggen dit uit met het voorbeeld over patronen uit Figuur 5.2. Deze opgave werd uitgetest bij leerlingen op een Nederlandse basisschool, op het einde van groep 6. Dit is in Vlaanderen het einde van het 4de leerjaar.

Opgavenserie V-patronen

Soms zie je vogels vliegen in een V-patroon:



figuur 7: Vogels in V-formatie

1. Zo'n patroon kun je gemakkelijker met stippen weergeven. Hier zijn de drie kleinste V-patronen:

figuur 8: Stippen in V-patroon

a. Teken het vierde V-patroon ernaast.
b. Kan een V-patroon 84 stippen hebben? Waarom of waarom niet?
c. Hoeveel stippen zitten er in V-patroon nummer 6? En hoeveel in nummer 10?

2 Teken een V-patroon met 19 stippen.

3 Soms is het handig om je resultaten in een tabel te laten zien. Het begin van zo'n tabel is hieronder al gemaakt:

V-nummer	aantal stippen
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	

a. Vul de tabel in.
b. Aan het V-nummer kun je zien hoeveel paren vogels er in ieder V-patroon zitten.
Zie je nog andere patronen in de tabel?

4 Je kunt de rij met V-patronen net zo lang maken als je zelf wilt. Hoeveel stippen zitten er in het patroon met V-nummer 100? Hoe weet je dat?

Boven het IJsselmeer vliegen twee groepen wilde ganzen, allebei in een mooie V-vorm. Voor ze naar het zuiden vertrekken komen ze bij elkaar.

5 Kan de nieuwe groep een perfecte V vormen? Waarom of waarom niet?

Figuur 5.2 Voorbeeldopgave over patronen

In vraag 1C wordt de veralgemening van het patroon voorbereid. Via een tabel leidt dat in vraag 4 tot een formule in woorden. Bij vraag 5 moeten leerlingen een eigenschap van oneven getallen gebruiken die ze al geleerd hebben.

De meeste leerlingen beantwoordden vraag de eerste vraag correct. Bij een aantal leerlingen was het antwoord op vraag 1b op het informele niveau: "*nee, als je het splitst heb je 42 aan elke kant maar er moet ook nog iemand voorop*" of "*nee, want onderaan zit er nog een*"*.* Andere leerlingen formuleerden een antwoord op het preformele niveau: "*nee, dat kan niet omdat het een even getal is*" of "*nee, omdat een V-patroon oneven is*".

Bij vraag 4 kwamen heel wat leerlingen tot een informele omschrijving van de formule: "*het dubbele met eentje erbij*" of "*2 keer 100 en dan nog de leider erbij dus 201*". Sommige leerlingen gaven een uitdrukking op het preformele niveau: "*twee keer het V-nummer plus 1*".

Vraag 5 zorgde bij sommige leerlingen voor verwarring. Een aantal leerlingen beweerde dat je het antwoord niet kunt weten" *omdat je toch niet weet hoe ze gaan vliegen*" of "*omdat je niet weet hoeveel het er zijn*". Andere leerlingen gaven een correct antwoord, op informeel of preformeel niveau: "n*ee, want dan heb je geen leider meer*" of "*nee, omdat het samen even is*".

2.3.2.2 Algebraïsch denken in het basisonderwijs van de VS: early algebra

In een traditionele aanpak gaat rekenkunde aan algebra vooraf. Algebra wordt aanzien voor gegeneraliseerde rekenkunde. Dit past in het constructivisme van Piaget: het formele denken komt in een later stadium dan het concrete denken. Ook Sfard (1995) vindt dat het proces het product moet vooraf gaan, of in haar woorden: het operationele aspect van een wiskundige uitdrukking moet het structurele aspect vooraf gaan. Deze traditionele aanpak heeft niet kunnen vermijden dat veel leerlingen moeite hebben met algebra.

De laatste 10 jaren is er in de VS een stroming ontstaan die ingaat tegen de visie van Sfard en Piaget. Volgens deze stroming, die *'early algebra'* genoemd wordt, is algebraïsch redeneren mogelijk bij leerlingen van 6 tot 12 jaar. De rekenkunde die in het basisonderwijs gegeven wordt, heeft volgens de aanhangers van 'early algebra' immers een algebraïsch karakter.

Carraher en Schliemann (2007) beschrijven de voordelen die zij zien bij een vroege introductie van algebra in het curriculum. De wiskunde van de lagere school wordt uitgediept. De leerlingen krijgen meer kansen om de rekenkunde goed te begrijpen: daarvoor zijn er veralgemeningen nodig en die zijn van nature algebraïsch. Een algebraïsche notatie maakt het volgens Carraher en Schliemann gemakkelijker om die veralgemeningen uit te drukken, ook voor jonge kinderen. Door algebra te verweven in het curriculum van het lager onderwijs, wordt een abrupte en geïsoleerde invoer van algebra in het secundair onderwijs vermeden. 'Early algebra' kan volgens hen zo de brug slaan tussen wiskundige ideeën in het basisonderwijs en de wiskunde in het secundair onderwijs.

Tegelijk pleiten Carraher en Schliemann voor een accentverschuiving in algebra. Waar het oplossen van vergelijkingen vaak als hoofdactiviteit wordt aangegeven, vinden zij dat de idee van functie en de bijbehorende aspecten als generaliseren, patronen en variabelen centraal moeten staan. Carreher en Schliemann stellen voor om, naast de formele algebrataal, ook aandacht te besteden aan tabellen, grafieken en natuurlijke taal om algebraïsche ideeën uit te drukken.

Verschillende onderzoeken geven volgens Carraher en Schliemann aan dat jonge kinderen kunnen omgaan met de regels, principes en representaties van algebra, maar ook dat dit een proces van lange adem is. Deze onderzoeken worden door Carraher en Schliemann opgesplitst in drie categorieën, naargelang van de interpretatie van het begrip rekenkunde.

Een *eerste* categorie bekijkt rekenkunde als de wetenschap van getallen. Deze studies introduceren algebra door generalisaties over getallen.

Blanton en Kaput (2000) bijvoorbeeld onderzochten of leerlingen van het derde leerjaar kunnen omgaan met even en oneven getallen. Leerlingen gaven snel aan dat de som van twee even getallen opnieuw een even getal is. Vele leerlingen dachten spontaan dat de som van twee oneven getallen terug oneven is. Ook bij de som van een even en een oneven getal waren er soms foute antwoorden. De som van een even en een oneven getal werd als even aangeduid, en de som van een oneven en een even getal correct als oneven. Een leerling verklaarde haar antwoorden door te verwijzen naar de eerste term: is die even, dan is het resultaat ook even; is die oneven, dan is de som ook oneven. Deze leerling maakte dus foute veralgemeningen. Om de juiste antwoorden duidelijk te maken, maakte de leerkracht geen gebruik van getalvoorbeelden. Leerlingen redeneerden met papiermodellen die willekeurige even en oneven getallen voorstellen. Maanden later konden leerlingen zelf veralgemeningen ontdekken in de aard van 'het product van een getal en een even getal is altijd even'. Daarbij waren ze in staat om 'even getal' te zien als een variabele.

Fuji en Stephens (in Lins en Kaput, 2004) werken met het begrip 'quasi-variabele': getallen uit een verzameling die een wiskundige relatie illustreren die geldig is voor alle getallen van die verzameling. Bijvoorbeeld: bekijk de gelijkheid

$$78 - 49 + 49 = 78$$

De getallen '78' en '49' spelen de rol van quasi-variabele, want een getal (in dit geval 78) blijft onveranderd als er een ander getal (in dit geval 49) van wordt afgetrokken en weer bijgeteld.

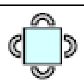
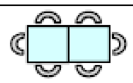
Een *tweede* categorie onderzoeken naar 'early algebra' vertrekt van het verband tussen rekenkunde en redeneren over grootheden. Davydov en Bodanskii zijn hier de grondleggers van. Hun visie werd vertaald door Dougherty (in Carraher en Schliemann, 2007) in het Measure Up – project. Davydov omschrijft een aanpak die ingaat tegen het constructivisme van Piaget. Hij ontwikkelde een algebraleerlijn volgens het principe 'leren komt voor ontwikkelen'. Op jonge leeftijd worden leerlingen geconfronteerd met materiaal om de idee van veralgemening aan te brengen. Deze Russische visie is ook uitgewerkt in het Measure Up project in Hawai. Leerlingen leren in het eerste leerjaar om grootheden (bijvoorbeeld omtrek en oppervlakte) te vergelijken en doen dat door te werken met symbolen in plaats van met getallen.

Een *derde* visie op 'early algebra' probeert om rekenkunde te koppelen aan het functiebegrip. Daar horen verschillende voorstellingsvormen bij: gesproken taal, een tabel, een grafiek, maar ook een functievoorschrift.

Carraher, Martinez en Schliemann (2008) deden langdurig onderzoek bij leerlingen in het lager onderwijs. Leerlingen kregen gedurende 3 jaar 3 uur per week extra les in 'early algebra'. Hier volgt een omschrijving van twee lessen bij leerlingen van 9 jaar. De focus van deze lessen ligt op de overgang van patronen naar het functiebegrip.

Beide lessen gingen over het aantal personen dat in een restaurant gelijktijdig aan tafel kan zitten. In de eerste les werden de tafels apart gezet en konden aan elke tafel 4 personen zitten. In de tweede les werden alle tafels aan elkaar geplaatst.

Tabel 5.2. Tabel bij het tweede tafelprobleem van Carraher, Martinez en Schliemann

Dinner tables	Show how	Number of People
1 		4
2 		
3		
4		
5		
6		
7		

De leerlingen werkten met tabellen. De tabel waarmee ze bij de tweede opgave werkten, is opgenomen in Tabel 5.2. Leerlingen moesten gestimuleerd worden om niet enkel naar de kolom met het aantal personen te kijken. Ze formuleerden vaak een recursief verband: *het aantal personen is dat in de vorige rij plus 2.* Met de middelste kolom van Tabel 5.2 willen de onderzoekers leerlingen stimuleren om het verband tussen het aantal tafels en het aantal personen te zoeken, dus om te denken aan een functie. Dit functiedenken werd nog meer uitgelokt door te vragen naar het aantal personen dat aan 100 tafels plaats kan nemen. Uiteindelijk waren 8 van de 15 leerlingen in staat om het gezochte verband uit te drukken, al dan niet in algebraïsche notatie.

2.3.3 Een bredere kijk op algebra in het secundair onderwijs

Drijvers (2006) is voorstander van een verrijking van het algebraonderwijs in de onderbouw van havo en vwo, de eerste drie jaren van de academische richtingen van het secundair onderwijs in Nederland. Hij ziet kansen bij verschillende onderwerpen, die vaak te maken hebben met abstraheren en formaliseren. Hij lijkt hierbij de visie van de voorstanders van de 'early algebra'–beweging te delen.

Het ontdekken van patronen en structuren leidt volgens Drijvers op een natuurlijke wijze tot het generaliseren en het opstellen van formules, op een voor de leerling aangepast niveau van formalisering. Dit illustreert de kracht van algebra.

Bij formules en variabelen verdienen volgens Drijvers verschillende aspecten extra aandacht. Er is het opstellen van een formule (= modelleren), waarvoor situaties van patroonherkenning geschikte uitgangspunten zijn. Een tweede aspect is het doorzien van de structuur van een formule, het vermogen om formules te lezen, de algebrataal correct te interpreteren. Aandacht voor het formulebegrip zorgt ook voor een uitdieping van het variabelebegrip: een variabele als plaatshouder voor een getalwaarde, als onbekende bij het oplossen van een vergelijking, als veranderlijke (een grootheid die een hele verzameling doorloopt), als generalisator of representant van een gehele verzameling. Zo kan de stap naar symbolische algebra op een natuurlijke manier gezet worden.

ICT kan hierbij een hulpmiddel zijn. Roelens geeft verder in dit hoofdstuk voorbeelden van applets die kunnen gebruikt worden bij het (leren) veralgemenen. Een andere mogelijkheid is het werken met een spreadsheet of rekenblad, zoals Excel.

Ainley, Bills en Wilson (2004) onderzochten bij leerlingen van het laatste jaar van het basisonderwijs en van de eerste graad van het secundair onderwijs hoe rekenbladen gebruikt kunnen worden bij de introductie van algebra en algebraïsch redeneren. Ze ontwikkelden hiervoor 6 opdrachten. Een aantal van deze opdrachten wordt hier besproken. Bij het honderdveld (zie Figuur 5.3) moesten leerlingen de som van de twee armen van een kruisvorm (in het geval van Figuur 5.3: 6 + 16 + 26 en 15 + 16 + 17) vergelijken. Om dit gemakkelijker te maken, werd aan de leerlingen gevraagd een 'controlekruis' op te stellen, en dit op te stellen met formules. Ook de uiteindelijke sommen werden opgesteld met formules. Zo leren leerlingen te verwijzen naar cellen in plaats van naar concrete getallen, wat volgens Ainley e.a. een brug slaat tussen de natuurlijke taal en de algebraïsche notatie.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
11										
12		6								
13	15	16	17							
14		26								
15	Column total				48					
16	Row total				48					

Figuur 5.3 Honderdveld met ingevuld controlekruis

In een andere opdracht kregen de leerlingen een voorgeprogrammeerd rekenblad. Hun opdracht bestond er in de getallen 1, 2, 3, 4 en 5 in de eerste kolom in te vullen zo dat het getal in cel E5 zo groot mogelijk werd (Figuur 5.4).

	A	B	C	D	E
1	1				
2	3	4			
3	5	8	12		
4	4	9	17	29	
5	2	6	15	32	61

Figuur 5.4 Spel met voorgeprogrammeerd rekenblad

De leerlingen konden deze opgave aanpakken door te ‘gissen en missen’, maar deze strategie is vrij omslachtig. Beter was het om op zoek te gaan naar de ‘regel’ die gebruikt werd bij het invullen van het rekenblad, en om die algebraïsch uit te drukken. Figuur 5.5 geeft weer hoe een leerling te werk ging. De conclusie van deze leerling was dat ‘je de grootste getallen in het midden moet plaatsen, omdat die het meeste gebruikt worden’.

A				
B	A + B			
C	B + C	A+2B + C		
D	C + D	B+2C + D	A+3B+3C+D	
E	D + E	C+ 2D + E	B+3C+3D+E	A+4B+6C+4D+E

Figuur 5.5 Oplossingsmethode van een leerling

2.4 Is abstraheren belangrijk voor alle leerlingen?

2.4.1 Kan abstractie belangrijker worden in het basisonderwijs?

In de uitgangspunten bij de eindtermen wiskunde voor het basisonderwijs staat:

“Basisonderwijs dat voor alle kinderen een grotere zorgbreedte nastreeft, mag niet overladen zijn. Dat geldt ook voor wiskunde. Een te grote hoeveelheid vakjargon of te veel overdracht van regels, formules en procedures die veel kinderen niet inzichtelijk begrijpen, kunnen zo’n overmatig belasten in de hand werken. Belangrijk is dat de basisvaardigheden (hoofdrekenen, cijferen, schatten, toepassingen in de dagelijkse realiteit van rekenvaardigheden, praktijkgericht metend rekenen, ruimtelijke oriëntatie, …) in ruime mate aan bod kunnen komen. (…) Een te grote en vooral een te vroege nadruk op het abstracte kan tot een methodiek leiden van voor- en nazeggen, tot blind toepassen van aangeleerde procedures en redeneringen. Dit gaat ongetwijfeld ten koste van de eigen wiskundige activiteit van kinderen (Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, 1995)*.”*

Er bestaat nu wetenschappelijk onderzoek dat ons doet nadenken of er meer stappen in het leren abstraheren in de lagere school kunnen gezet worden, door meer te redeneren over de rekenkunde, door te veralgemenen, misschien ook door al met letters te werken.

2.4.2 Is abstractie nuttig voor alle leerlingen in het secundair onderwijs?

Drijvers (2006) maakt binnen ‘algebraïsche vaardigheden’ een onderscheid tussen ‘basisvaardigheden’ en ‘symbol sense’. Onder basisvaardigheden verstaat hij het algebraïsch rekenen, dat leerlingen geroutineerd en zonder fouten moeten kunnen uitvoeren. Hoe ver dit moet gaan is voer voor discussie, ook in Vlaanderen. Onder ‘symbol sense’ verstaat hij het algebraïsch redeneren en een strategische vaardigheid. Het is een soort algebraïsche expertise die vaak op de achtergrond blijft. Arcavi (2005) beschrijft een aantal concrete vaardigheden die tot ‘symbol sense’ behoren, zoals symbolen met inzicht en gevoel kunnen gebruiken, een algebraïsche uitdrukking kunnen ‘lezen’ en de structuur ervan doorzien, twee verschillende formules globaal kunnen vergelijken en hun verhouding kunnen inschatten, of afhankelijk van de probleemstelling een geschikte algebraïsche representatie kunnen kiezen. Bekijk bijvoorbeeld de volgende vergelijking:

$$\frac{2x+3}{4x+6}=2$$

Technische manipulatie van deze vergelijking leidt tot de 'oplossing' $x=\frac{-3}{2}$, die ingevuld in de noemer 0 oplevert. Een leerling die 'symbol sense' gebruikt, zal onmiddellijk zien dat in het linkerlid de teller de helft is van de noemer. Het linkerlid kan dus onmogelijk gelijk zijn aan 2.

De ontwikkeling van 'symbol sense' is volgens Drijvers belangrijk voor alle leerlingen, op hun niveau, en verdient meer aandacht in het wiskundeonderwijs. Arcavi geeft aan dat aan 'symbol sense' kan gewerkt worden. Reflectie over opgaven, het gebruiken van gezond verstand, het niet overhaast overgaan tot algebraïsche manipulaties en het kritisch omspringen met automatismen zijn volgens Arcavi hier essentiële voorwaarden bij.

2.4.3 Is abstractie een goede keuze voor alle leerlingen van het secundair onderwijs?

Volgens Drijvers, Goddijn en Kindt (2006) is algebra een krachtig gereedschap omwille van de afstand die algebra neemt tot de oorspronkelijke betekenis. Dit aspect van algebra is vooral belangrijk voor leerlingen die een exacte wetenschappelijke of wiskundige vervolgopleiding zullen volgen. Ook voor leerlingen die later in hun (school)loopbaan nauwelijks met wiskunde in aanmerking komen, is volgens Drijvers, Goddijn en Kindt enige kennis van algebra belangrijk, om verschijnselen te ordenen en te sorteren, om patronen en regelmaat te ontdekken en daarmee te redeneren. Deze algebra is toepassingsgericht en minder formeel. De ontwikkeling van gecijferdheid is voor deze leerlingen belangrijker dan de ontwikkeling van een formele algebra. Er moet dus terughoudend omgegaan worden met formaliseren en abstraheren. Wel moeten deze leerlingen volgens Drijvers, Goddijn en Kindt vaardig kunnen omgaan met formules.

3 Bronnen

Ainley, J., Bills, E. en Wilson, K. (2004). *Purposeful Algebraic Activity, Final report from Award R000239375.* Warwick: University of Warwick, Institute of Education. Raadpleegbaar op http://www.le.ac.uk/se/jma30/PAAfinalreport.doc

Arcavi, A., (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-48. Raadpleegbaar op http://stwww.weizmann.ac.il/department40/publications/Arcavi/22%20Symbol%20Sense%202005.pdf

Blanton, M. en Kaput, J. (2000). Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In M. Fernández (Ed.) *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.115-119). Columbus, OH, ERIC Clearinghouse. Raadpleegbaar op http://www.west.asu.edu/cmw/pme/resrepweb/PME-rr-blanton.htm

Carraher, D., Martinez, M. en Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. In *ZDM – The International Journal on Mathematics education*, *40(1)*, 3-22. Raadpleegbaar op http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2008/mathGeneralization.pdf

Carraher, D. en Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning, a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-70). Charlotte: North Carolina.

Dekker, T. en Dolk, M. (2006). Van rekenen naar algebra. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 25-39). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. (2006). Algebra in de onderbouw van havo en vwo. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 55-68). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. (2006). Algebra in de tweede fase van havo en vwo. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 69-83). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P., Goddijn, A. en Kindt M. (2006). Oriëntatie op schoolalgebra. In P. Drijvers (Red.) *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 7-23). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Godet, R. (2010). *Rapport établi par le Service general de l'inspection au terme de l'année scolaire 2009-2010.* Brussel: Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, Service general de l'inspection. Raadpleegbaar op www.enseignement.be/download.php?do_id=7921&do_check

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Reds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer Academic publishers, The University of Melbourne, Australië.

Lins, R. en Kaput, J, (2004), The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Reds) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Kluwer Academic publishers, The University of Melbourne, Australië.

Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap (1995). *Basisonderwijs: ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Decretale tekst en uitgangspunten*. Brussel: Ministerie Departement Onderwijs, Afdeling informatie en documentatie.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives, *Journal of mathematical behaviour*, *14,* 15-39. Raadpleegbaar op http://www.math.harvard.edu/~engelwar/MathE599/Sfard,%20Development%20of%20Algebra.pdf

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (B-stroom)*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (A-stroom)*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

4 Reflectie over de resultaten door andere onderwijspartners

4.1 Is het wiskundeonderwijs te abstract? Onderwijsinspectie (basis- en secundair onderwijs)

De eerste vraag die men in deze discussie moet uitklaren is wat men verstaat onder 'te abstract'. Hierbij is het aangewezen om een fundamenteel onderscheid te maken tussen wiskunde en wiskundeonderwijs.

De huidige eindtermen en ontwikkelingsdoelen in het basis- en secundair onderwijs zijn een vertaling van een aantal uitgangspunten die de hele opbouw vanaf het kleuteronderwijs tot het einde van het secundair onderwijs proberen te vatten. Deze algemene uitgangspunten achter de eindtermen wiskunde proberen dit onderscheid tussen wiskunde en wiskundeonderwijs duidelijk te maken.

Wij denken dat het moment gekomen is om deze uitgangspunten nog eens nader te bekijken om van daar uit op zoek te gaan naar mogelijke oplossingen voor een aantal knelpunten die uit de peilingen wiskunde naar boven komen.

4.1.1 Wat vertellen de uitgangspunten bij de eindtermen wiskunde ons?

"De stellingname dat wiskunde abstract en formeel is en dat ze eigenlijk los staat van de realiteit is tot op zekere hoogte correct.

Bij wiskundeonderwijs gaat het eerder om het zinvol ontwikkelen en opbouwen bij jonge mensen van wiskundige kennis en denkwijzen binnen een krachtige leeromgeving.

Zin geven aan abstracte begrippen brengt ons tot de hamvraag. In hoeverre slagen we er voldoende in om bij onze jongeren de juiste processen op gang te brengen die toelaten om vanuit hun eigen mogelijkheden de verschillende stappen te zetten naar het correct mentaal 'stichten' en 'vastzetten' van abstracte begrippen.

Zonder een semantische discussie te willen uitlokken, is het misschien beter om hier binnen het wiskundeonderwijs voorlopig over theorievorming te spreken in plaats van over abstractie. Dit laat ons toe om in deze discussie de aandacht te verleggen naar het zingevingsproces van die abstracte begrippen.

Deze invalshoek betekent dat de eindtermen niet alleen rekening moeten houden met het vak/leergebied *op zich maar ook met* de leerlingen *aan wie het onderwezen wordt en met* de maatschappij *waarbinnen die leerlingen, rekening houdend met hun talenten, zullen moeten functioneren.*

Wiskunde kan inderdaad zeer complex zijn en de abstractiegraad kan zeer hoog liggen. Maar tegelijkertijd is er in onze technologisch georiënteerde wereld een grote vraag naar praktisch bruikbare en concrete wiskunde. Hier ontstaat een voortdurende wisselwerking tussen theorievorming en de bruikbaarheid van het vak.

Het vak/leergebied wiskunde

De wijze waarop de eindtermen vanaf het kleuteronderwijs tot het einde van het secundair uitgeschreven en opgebouwd zijn, vertrekt van de wisselwerking tussen een horizontale en een verticale component. De horizontale component gaat uit van waarnemingen, ervaringen, problemen en hypotheses. De verticale component besteedt vooral aandacht aan abstrahering en structurering. Beide componenten komen aan bod door te werken vanuit een spiraalopbouw. Dit model brengt met zich mee dat niet elk onderdeel van wiskunde dat wordt aangevat, meteen wordt afgewerkt. De onderdelen komen meermaals aan bod op een steeds hoger en meer gestructureerd niveau van theorievorming.

Deze aanpak biedt een aantal voordelen voor de leerling:

- *De leerling verwerft geleidelijk aan de typische manier van denken en werken eigen aan elk onderdeel (meetkunde, getallenleer, algebra, kansrekening en stochastiek, analyse, …);*
- *Er wordt aandacht besteed aan de weg die voert naar theorievorming en die tegelijkertijd de zingeving verhoogt;*
- *Als de leerling een niveau niet of foutief verwerkt, dan is dit niet zo dramatisch als bij een eenmalige benadering. De leerling kan aanpikken bij een vorig niveau en verder werken aan de verticale opbouw van het onderdeel;*
- *De drempel naar wiskunde wordt verlaagd. Dit geeft de kans om reeds in een beginstadium te werken aan de samenhang tussen de verschillende onderdelen.*

Deze voortschrijdende theorievorming (of abstrahering) en horizontale afstemming van de verschillende onderdelen laat toe om voldoende tijd uit te trekken op maat van de leerling.

Bij nieuwe wiskundige kennisopbouw is het daarom belangrijk voldoende en uiteenlopende concrete aanknopingspunten te zoeken. Door een abstract begrip met voldoende voorbeelden te onderbouwen blijft de kennis minder geïsoleerd. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen met het begrip of bij het niet functioneren van het abstracte begrip, kan de leerling terugvallen op die voorbeelden. Bij de ontwikkeling van de begrippen worden tevens vaardigheden, rekenregels en algoritmen ontwikkeld. Geleidelijk aan komt men tot theorievorming. Er wordt ingegaan op het formuleren van definities, eigenschappen en stellingen en de nood aan bewijsvoering.

De leerling

De leerling wordt op die wijze uitgedaagd om te reflecteren over zijn denkproces. Er dienen een aantal keuzes gemaakt te worden die resulteren in een zekere planning. Tussentijdse controles hebben een sturend effect en kunnen leiden tot koerswijzigingen. Bij het uitblijven van resultaten dient er gezocht te worden naar oorzaken. Bekomen resultaten dienen geëvalueerd te worden.

Het belang van ruimte voor reflectie bij de vorming zit er onder meer in dat:

- *De leerling zijn handelen kritisch leert analyseren;*
- *De leerling minder afhankelijk wordt van anderen;*
- *Het denken aan planmatigheid wint;*
- *De oplossingsmethoden worden onderzocht op generaliseerbaarheid;*
- *Het denken flexibeler wordt.*

De horizontale en verticale component hebben tevens tot doel de motivatie van elke leerling voor het vak/leergebied wiskunde te verhogen. Dit kan gebeuren door er voor te zorgen dat het vak nuttig, zinvol en boeiend ervaren wordt zonder afbreuk te doen aan de specificiteit van het vak. Het nut komt tot uiting in de bruikbaarheid en de toepassingsgerichtheid. Wiskunde wordt zinvoller als men vertrekt van herkenbare situaties en voorbeelden die aangepast zijn aan hun bevattingsvermogen en leefwereld. Dergelijke probleemsituaties dagen hen uit en betrekken hen actief bij de opbouw van hun wiskundige kennis en vaardigheden. Zo ondervinden zij de zin van theorievorming aan den lijve.

Een te grote en vooral te vroege nadruk op het abstracte kan tot een methodiek leiden van voor- en nazeggen, tot blind toepassen van aangeleerde procedures en redeneringen. Dit gaat ongetwijfeld en ten koste van de eigen wiskundige activiteit van leerlingen. Als leerlingen voldoende tijd krijgen om via hun eigen wiskundige activiteit tot inzicht te komen, zullen ze bijna automatisch meer plezier beleven aan wiskunde.

De maatschappij

In onze maatschappij wordt veel informatie aangeboden via beelden. Binnen wiskunde moet de leerling leren omgaan met de wiskundige verwerking van informatie uit tabellen met getallen, uit grafieken en diagrammen en allerhande schema's. De leerlingen leren functioneel gebruik maken van verbanden tussen grootheden aan de hand van deze voorstellingen. Ons wiskundeonderwijs moet inspelen op het feit dat sommige leerlingen enkel worden uitgedaagd door de algebraïsche benadering van een probleem, anderen door een schematische benadering en nog anderen door grafieken en diagrammen. De verschillende toepassingsdomeinen spelen elk voor zich in op deze drie aspecten van omgaan met wiskunde.

Door de snelle ontwikkelingen in de micro-electronica kunnen berekeningen en grafische voorstellingen gemakkelijker uitgevoerd worden. Hierdoor kan men binnen het wiskundeonderwijs andere klemtonen leggen. Men kan:

- *Vertrekkend vanuit het hoofdrekenen als basisvaardigheid, mogelijkheden exploreren om inzichtelijk te werken. Het gebruik bevordert het gevoel van grootte-orde en inzicht in de nieuwe elementen die decimale getallen met zich meebrengen.*
- *De samenhang tussen verschillende soorten getallen kan hier visueel ondersteund worden;*
- *Interessante simulaties kunnen het denkproces ondersteunen;*
- *Bij toepassingen kan de aandacht verschuiven van het rekentechnische naar het structurele en probleemoplossende aspect.*

Door het vlugge tempo waarmee de samenleving verandert, is het belangrijk dat de leerlingen de nodige soepelheid ontwikkelen om snel en efficiënt allerhande problemen op te lossen. De wendbaarheid van opgedane wiskundekennis wordt steeds belangrijker. Eenzelfde methode of redenering kan ingezet worden in verschillende domeinen van de samenleving. Naast de kennis van het vakdomein zijn er ook een aantal meer inhoudsvrije vaardigheden en zoekstrategieën die vooral hun diensten bewijzen bij het vertalen van een situatie in een wiskundig herkenbaar probleem".

Deze uitgangspunten vormen als het ware de 'memorie van toelichting' bij het decreet op de eindtermen. Hierover was er consensus binnen het volledige onderwijsveld. Zij vormen de achterliggende logische opbouw die moet verzekeren dat men in ons wiskundeonderwijs, rekening houdend met de verscheidenheid aan talenten van leerlingen, een voortschrijdende abstrahering inbouwt in de leerlijn van kleuteronderwijs tot het einde van het secundair.

In die zin laten ze nog voldoende vrijheid aan elke school om deze uitgangspunten te implementeren in hun lokale aanpak.

De eindtermen en ontwikkelingsdoelen zijn zodanig geformuleerd dat ze voldoende vrijheid laten om aan theorievorming te doen op maat van de leerlingen of de groepen van leerlingen binnen elke individuele school.

De vraag is nu of het implementatieproces van eindtermen via leerplannen naar handboeken voldoende rekening houdt met deze uitgangspunten en of de lokale onderwijspraktijk hier voldoende op afgestemd is.

Een andere vraag die men moet beantwoorden heeft te maken met het koppelen van de resultaten van de peilingen aan die lokale situatie. Hoe moet men de resultaten van de peilingen ‘lezen’ in relatie tot de onderwijsrealiteit in het veld?

4.1.2 Wat stellen we vast tijdens de doorlichtingen?

Basisonderwijs

- Globaal gezien zijn de resultaten van de peilingen in het basisonderwijs positief. Deze goede resultaten zijn in grote mate te danken aan de leerplannen. In het basisonderwijs fungeren al meerdere jaren leerplannen met een duidelijke afbakening van beheersingsniveaus die rekening houden met de ontwikkeling van het kind. De leerlijnen zijn in de leerplannen gebruiksklaar uitgewerkt vanaf de jongste kleuters tot het zesde leerjaar.
- In het lager onderwijs krijgt het handelend werken met maten en meetkundige vormen en inzicht verwerven in driedimensionale figuren de laatste jaren meer aandacht. De leerlingen worden ook meer vertrouwd met probleemoplossend denken in reële situaties en met zoek- en aanpakstrategieën om problemen op te lossen. De actuele onderwijsleerpakketten spelen hier doorgaans goed op in. Wiskundige activiteiten worden soms verder gezet in lessen bewegingsopvoeding. Dit heeft een gunstige invloed op het consolideren van begrippen en inzichten.
- De meeste leraren in het basisonderwijs hebben aandacht voor voldoende gradatie en continuïteit in aanbod en methodiek over de verschillende leerjaren heen. De aangeleerde inhouden en vaardigheden worden op verschillende tijdstippen in het schooljaar en doorheen het lager onderwijs herhaald en ingeoefend. Hierbij werkt men meestal vanuit het concreet handelend (C) leren (met concreet materiaal), naar het schematische (S) om tenslotte over te gaan naar het abstracte (A).
- Uit de peilingsproef blijkt dat er voor één eindterm namelijk ‘betekenisvolle herleidingen’, een significante achteruitgang is in het basisonderwijs. Herleidingsopgaven komen hier vaak in contexten voor als deel van de oplossingsweg. De noodzakelijke vaardigheid en kennis daarvoor vergt een zekere instructietijd en specifieke training. Het mechanisch oefenen van de nodige rekenvaardigheden en algoritmen mag hier terug wat meer aandacht krijgen maar de inbedding in de oplossingsweg blijft best behouden.
- Voor de andere eindtermen zijn er weinig tot geen significante opmerkingen in het basisonderwijs. Daar waar de resultaten minder goed scoren kan een mogelijke verklaring te zoeken zijn bij de aanlooptijd die te kort is voor het verwerven van bepaalde vaardigheden of in de tijdgap’s. Sommige leerplandoelen komen pas voor de eerste keer aan bod in de derde graad basisonderwijs. Andere doelstellingen dienen in principe verworven te zijn na de tweede graad. Indien onderwijsleerpakketten te weinig oefenkansen voorzien in de daaropvolgende leerjaren en wanneer leerkrachten deze hiaten niet aanvullen, dreigen deze vaardigheden te weinig systematisch ingeoefend of herhaald te worden.
- De overgang van het aanbrengen en concreet inoefenen van het getalbegrip naar bewerkingen met getallen (splitsen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen,…), evenals toepassingen met bewerkingen verloopt nog te snel, zeker voor rekenzwakke kinderen.
- De aanlooptijd is in het basisonderwijs blijkbaar te kort om de stap van o.a. breuken naar procenten en de toepassingen naar kansrekenen en toegepaste wetenschappen te zetten. Hier pleiten we voor een vroegere start en voorbereidingstijd. Dit onderdeel zou vroeger een plaats kunnen krijgen binnen de spiraalopbouw.

- We stellen tijdens de doorlichtingen vast dat de verwachtingen in het leerplan om vanuit het concreet handelen te komen tot het abstracte nog sterk leerkrachtgebonden is en hun aanpak veeleer gestuurd wordt vanuit de onderwijsleerpakketten (methodes).
- Uit doorlichtingsverslagen blijkt dat leerkrachten in basisonderwijs doorgaans meer en meer differentiëren en remediëren. Ze maken hiervoor gebruik van de aangereikte pakketten in de methode. Toch blijkt dat de differentiatie zich veeleer beperkt tot tempodifferentiatie tijdens de verwerkingsfase en/of tot uitlooptaken. Curriculumdifferentiatie komt weinig voor. Leerkrachten willen veeleer de leerinhouden uit de onderwijsleerpakketten afgewerkt krijgen i.p.v de leerplandoelen. Een beperkt aantal leerkrachten durft loskomen van de opbouw in de onderwijsleerpakketten of verschuift leerinhouden naar een vorige of volgende leeftijdsgroep of beslist om bepaalde leerinhouden (uitbreiding) weg te laten. Hierdoor blijven er enerzijds kansen liggen om voor zwakke leerlingen het leerstofaanbod te verengen tot basisleerstof, i.c. de eindtermen en om een stap terug te zetten in het leerproces door meer tijd uit te trekken voor de concrete handelende fase. Deze leerlingen krijgen soms een te sterk ‘technisch-instrumenteel’ aanbod en minder kansen tot de ontwikkeling van probleemoplossende vaardigheden. Anderzijds krijgen leerlingen met nood aan extra uitdagingen vaak te weinig aanvullende leerinhouden of leerinhouden die het denkproces stimuleren. Deze leerlingen krijgen meestal meer oefeningen of moeilijkere, maar weinig uitdagend of contextueel gebonden.

Secundair onderwijs

- De leerplannen in het secundair onderwijs geven meestal expliciet aan dat het wiskundeonderwijs een proces is van geleidelijke, systematisch voortschrijdende en steeds herhalende opbouw. Er wordt verwezen naar de spiraalopbouw uit de algemene uitgangspunten. Dit betekent dat elk aangevat onderdeel van de wiskunde niet meteen wordt afgewerkt.
- De meeste leerplannen wiskunde van de eerste graad geven als beginsituatie een opsomming van de eindtermen/leerplandoelen van het leergebied wiskunde in het basisonderwijs. Dit soms met gedetailleerde overzichten van de verschillende leerdomeinen (getallenkennis, bewerkingen, meten en metend rekenen, meetkunde, domeinoverschrijdende doelen).
- Dit betekent dat de meeste leraren secundair in principe voldoende op de hoogte zijn van de visie van de leerplannen wiskunde in het basisonderwijs.
- In de leerplannen voor het secundair onderwijs wordt tevens expliciet gevraagd om bij het oplossen van problemen en zeker in de meetkunde eerst een visuele voorstelling te maken van de situatie. Maar de moeilijkheid van die wiskundige visuele taal voor de leerlingen mag niet onderschat worden. Vandaar dat het belangrijk is de leerlingen met vele figuren te confronteren en ze de vertaling van opgave naar figuur of van figuur naar geschreven informatie te laten maken. Vooral bij het maken van bewijzen kan dit belangrijk zijn: bijv. de gegevens op een figuur aanbrengen.
- In het secundair onderwijs komen bewerkingen in de meeste leerplannen frequent terug in de opeenvolgende getallenverzamelingen, maar de een- en veeltermen worden maar één keer benaderd in de meeste leerboeken. De leerboeken vormen meestal het enige referentiekader. De leer- of handboekgerichtheid in plaats van leerplangerichtheid impliceert een eenmalige studie van deze veeltermen.
- Dit probleem hangt sterk samen met de meer generieke aanloop naar de algebra via de overgang van het werken met cijfers naar het werken met letters. Dit is de grote verandering van basis- naar secundair onderwijs en wordt in de eindtermen aangegeven via het werken met patroonherkenning en het beschrijven ervan met behulp van letters. De voorziene tijd in de leer- of handboeken is meestal te kort en te bruusk.
- Tijdens doorlichtingen stellen we vast dat leraren secundair onderwijs zich dikwijls te angstvallig vastklampen aan leerboeken, slechts beperkt aandacht hebben voor de leerplannen en er voor het ontwikkelen van echte leerlijnen nog kansen onbenut blijven.
- In verschillende onderwijsspiegels (jaarverslagen) van de onderwijsinspectie wordt gerapporteerd over het weinig systematisch hanteren van de leerplannen/eindtermen/ontwikkelingsdoelen als referentiekader. De leer- of handboek- of methodegerichtheid overweegt op de leerplangerichtheid.

Overgang basisonderwijs naar secundair onderwijs

- Zowel in het basosonderwijs als in het secundair onderwijs stellen we dus vast dat methodegerichtheid of leer- of handboekgerichtheid veeleer primeert op leerplangerichtheid. Hierdoor is de kans reëel dat belangrijke stappen in het denk- en ontwikkelingsproces van de leerling worden overgeslagen, te weinig aandacht krijgen of niet meer worden opgefrist eenmaal ze afgewerkt zijn.

- Het risico is dan ook groot dat men foute verwachtingen stelt ten aanzien van de jongeren die instromen in het eerste leerjaar van het secundair onderwijs. De sterke leer- of handboekgerichtheid in basis- en secundair onderwijs zorgt voor een extra moeilijkheid. Leerlingen hebben een verschillende achtergrond wat verworven kennis en vaardigheden betreft. Dit kan deels opgevangen worden door intenser overleg tussen de secundaire school en de verschillende basisscholen.
- Het verschil in moeilijkheidsgraad tussen basisonderwijs en de eerste graad secundair onderwijs is voor zwakkere leerlingen te groot om dit in een beperkte termijn van twee schooljaren te overbruggen.
- Het abstraheringsproces vanaf het kleuteronderwijs tot en met de eerste graad secundair onderwijs is voor verbetering vatbaar. Ondanks de vaststellingen tijdens doorlichtingen dat leraren aan abstrahering heel wat aandacht besteden in het onderwijsleerproces, kan het abstraheringsproces nog beter voortbouwen op de peilingsresultaten. Blijkbaar gebeurt de overstap naar de leerinhouden en vaardigheden rond abstrahering nog te bruusk. Abstraheren en concretiseren moeten een voortdurende wisselwerking kennen. Hier is het uitwerken van leerlijnen vanuit het basisonderwijs naar het secundair onderwijs noodzakelijk. Abstraheren moet al aangezet worden vanuit het basisonderwijs (zie o.a. ontwikkelingsdoelen kleuteronderwijs 1.5 en 3.4 en de eindtermen lager onderwijs 1.28 en 1.29 en 4.1-4.3).
- Soms gaan leerplannen wat abstractie betreft verder dan wat er in de eindtermen gevraagd wordt. Een voorbeeld van zo'n goedbedoelde uitbreiding is het noteren van de formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud van vlakke en ruimtefiguren. De eindtermen lager onderwijs spreken over het herkennen en benoemen van deze figuren op basis van waarneembare eigenschappen. Het mentaal vastzetten van deze eigenschappen en figuren is een belangrijke voorbereidende stap naar veralgemening en abstrahering. Door de druk om het leerplan af te werken, zien we dat de voorziene tijd voor heel wat leerlingen te kort is.
- Het proces van overgang van cijfers naar het gebruik van letters als middel om te veralgemenen en als onbekenden kan vroeger gestart worden, zelfs al in het basisonderwijs via een aangepaste wijze van o.m. het omgaan met de eindtermen over patroonherkenning en verbanden, patronen tussen grootheden en hun maatgetallen via betekenisvolle herleidingen. De leerlijn van algebra is impliciet terug te vinden in de eindtermen/leerplandoelen van het basisonderwijs maar worden als dusdanig onvoldoende herkend. Leraren secundair onderwijs kunnen meer gebruik maken of inspelen op de voorkennis (pre-algebraïsche vaardigheden) van de leerlingen basisonderwijs.
- De leerkrachten in het basisonderwijs wenden de voorziene onderwijstijd voor wiskunde op weekbasis optimaal aan (gemiddeld 6 tot 7 lestijden). Omwille van de structuur van het secundair onderwijs is er hier een significant verschil. De beschikbare lestijden om de eindtermen te realiseren situeren zich binnen de marge van gemiddeld 4 tot 6 lestijden. Weinig secundaire scholen investeren in extra lestijden voor het langzamer uitwerken van de basisvorming. De sterkste leerlingen kunnen dan wel nog de basisvorming beheersen in een beperkt aantal lesuren, maar voor de middenmoot is meestal wat meer tijd nodig. Sommige scholen geven daarom aan Moderne Wetenschappen 1 of 2 wekelijkse lestijd(en) meer. Opvallend is dat ze dan voor de "minder abstract denkende" leerlingen in de technische opties opnieuw voor minder lestijden kiezen. Nochtans zijn de lessentabellen niet langer verplicht voor de overheid; Hier kan elke school vrij keuzes maken op basis van de noden van de verschillende doelgroepen. Deze tempodifferentiatie is één oplossing. Tijdens de doorlichtingen zien wij ook goede voorbeelden van curriculumdifferentiatie waarbij men de theorievorming niet uit het oog verliest. Via flexibele samenzettingen waarbinnen overgangen mogelijk blijven, daagt men door middel van aangepaste contexten en werkwijzen de minder abstract denkende leerlingen uit om gefaseerd de stap te zetten van concreet naar abstract.
- In het basisonderwijs zal men juist meer tijd investeren in het bijsturen van het leerproces bij leerlingen die het moeilijker hebben. Bovendien kunnen leerkrachten in het lager onderwijs nog bijsturen of verder inoefenen via hoeken- of contractwerk of in combinatie met andere leergebieden. Dat is een uitdaging voor de eerste graad secundair onderwijs maar wordt daar bemoeilijkt omwille van de versnippering van opdrachten. Toch kunnen hier extra mogelijkheden gecreëerd worden via een doordacht gebruik van bijvoorbeeld open leercentra waar er projectmatig en over vakken heen kan verder gewerkt worden aan probleemoplossende vaardigheden en transfer.
- Uit doorlichtingsverslagen blijkt dat er zowel in het basis- als in secundair onderwijs nog groeimogelijkheden liggen om vormen van flexibele klasorganisatie te hanteren om zo de onderwijstijd optimaal te benutten en om leerlingen echt actief te laten zijn (vb. klassikale instructiefases beperken, nog meer aanwenden van interactieve werkvormen, voorzien van duidelijke of functionele doe-opdrachten, ruimte scheppen voor initiatief, …). Ook de heterogeniteit van de groep kan nog meer positief aangewend worden om van en met elkaar te

leren. Daarnaast kunnen leerkrachten de leerlingen meer kansen bieden om te reflecteren over hun eigen wiskundig denk- en leerproces.

- Het is ook belangrijk te weten dat de tijd tussen de behandeling van een aantal onderwerpen in het basisonderwijs en de voortbouw in het secundair onderwijs soms twee tot zelfs drie schooljaren kan bedragen, waardoor er tijdgap's ontstaan. Bijvoorbeeld binnen 'meetkunde' worden de meeste doelen rond 'vlakke hoeken' behandeld in de tweede graad basisonderwijs. Dit zou een interval kunnen betekenen van twee schooljaren tot het eerste jaar secundair onderwijs. Dit wil niet noodzakelijk zeggen dat deze leerinhouden niet verder worden ingeoefend. Het hangt veeleer af van de methode, de groep, de leerkrachtvaardigheden en het flexibel omgaan met methode.
- Het is dan ook noodzakelijk om leraren te begeleiden in het leren hanteren van een klasmanagement waarin interactieve werk- en organisatievormen veel aandacht krijgen. Daardoor kunnen leerkrachten tijd vrij maken om individuele leerlingen te begeleiden of te remediëren. Daarnaast kan meer interne begeleiding en coaching van leerkrachten een meer gelijkgerichte didactische aanpak op school verzekeren.

4.1.3 Aanbevelingen

De resultaten van de peilingstoetsen en andere onderzoeken, evenals de vaststellingen vanuit de doorlichtingen kunnen een aanzet zijn om de pedagogisch-didactische aanpak over de niveaus heen aan een kritische reflectie te onderwerpen en bij te sturen waar nodig. Het debat kan aanleiding geven tot het zoeken naar overlegstructuren om het goede van beide niveaus te bewaren en de aansluiting tussen beide zo vlot mogelijk te maken.

1) Er is niet dadelijk nood aan een herziening van de eindtermen zelf. Het samenlezen van de eindtermen met de uitgangspunten en de funderende doelen en de formulering van de eindtermen zelf, bieden voldoende kansen om gepast in te grijpen in de verschillende implementatiestappen van eindterm tot en met het concrete leerproces in de klas.

2) De eindtermen en de leerplannen besteden globaal gezien voldoende aandacht aan het abstraheringsproces in relatie tot de spiraalaanpak uit de algemene uitgangspunten. Toch lijkt het ons een uitdaging voor de leerplanmakers om binnen en over basisonderwijs en secundair onderwijs heen de mogelijkheden te onderzoeken om ten aanzien van de knelpunten uit de peilingen verder op zoek te gaan naar het maximaal afstemmen van de abstraheringsprocessen die meer tijd vragen.

3) Het probleem van de verschillen tussen de leer- of handboeken zien we als een uitdaging voor extra overleg tussen de educatieve uitgeverijen. Niet met de bedoeling om in te grijpen in elkaars methode. Wel om te komen tot een set van gemeenschappelijke afspraken over een gedifferentieerd aanbod van theorievorming dat voldoende inspeelt op de verschillen tussen leerlingen en hun voorgeschiedenis.

4) Intenser overleg tussen de secundaire scholen en de basisscholen van waaruit de leerlingen instromen. Dit vooral om de beginsituatie van de verschillende leerlingen goed in te schatten en in beide richtingen inspanningen te leveren om de overgang vlotter te laten verlopen en om een aangepast aanbod te verzekeren voor alle types leerlingen.

4.2 Wiskundeonderwijs in de eerste graad SO. Abstraheren: zinvol voor alle leerlingen of niet haalbaar? Wendy Luyckx

4.2.1 Even scherpstellen

Vooraleer we ons verdiepen in 'het proces van abstraheren', willen we even de verschillende begrippen toelichten en verduidelijken.

Van Daele beschrijft de begrippen als volgt:

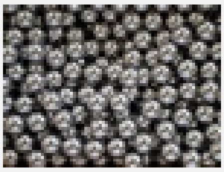
- Abstraheren: "uit de concrete werkelijkheid als begrip afleiden"
- Abstract: "losgemaakt van de werkelijkheid (tegenstelling concreet)"

▪ Abstract denken: “los van de toevallige werkelijkheid”

Verder vinden we ook volgende verwante omschrijvingen terug.
Abstractie komt van het Latijnse woord abstráhere, weglaten. Abstractie is het weglaten van alle niet essentiële informatie of aspecten om meer fundamentele structuren zichtbaar te maken.
Abstraheren is het in gedachte afzonderen, ontdoen van het bepalende of toevallige, als begrip afleiden.

Samenvattend kunnen we stellen dat abstraheren een denkproces is waarbij het denken tussen concrete elementen overgaat in het denken over de abstracties ervan.

We verduidelijken met een schematische voorstelling en enkele kernwoorden:

Concreet →		**Abstract**
	Proces: **Abstraheren**	
Kernwoorden:		*Kernwoorden:*
Waarneembaar		Structuren
Werkelijkheid		Algemeen/breed toepasbaar
Context		Voorstellingen
Toevallig		Formaliseren
Realistisch		Procedures
Voorbeelden		Essentiële informatie

4.2.2 Centrale vraag: Wat willen we met het wiskundeonderwijs van de eerste graad SO bereiken?

4.2.2.1 De rol van het wiskundeonderwijs van de eerste graad SO

De rol van het wiskundeonderwijs van de eerste graad SO kan vastgelegd worden in 3 functies:

1 ‘Gebruikerswiskunde’ – Wiskunde voor het dagelijks leven

2 Wiskunde als ondersteuning van andere domeinen

3 ‘Talentontdekking’ - Wiskunde als voorbereiding op een vervolgopleiding

Als we willen nagaan of ons wiskundeonderwijs te abstract is, is het belangrijk om de link tussen enerzijds de bovenstaande functies en anderzijds het proces van abstraheren te verduidelijken.

4.2.2.2 Abstraheren als essentieel onderdeel van de 3 functies

1 Het maatschappelijk leven vereist niet alleen wiskunde die direct toepasbaar en praktisch is. Door het vlugge tempo waarmee de samenleving verandert, is het ook belangrijk dat de leerlingen de nodige soepelheid ontwikkelen om snel en efficiënt allerhande problemen op te lossen.
Om zeer uiteenlopende dagelijkse doelen te bereiken is het belangrijk om uit een concrete realiteit alleen die aspecten af te zonderen die voor het gegeven doel belangrijk zijn. Om efficiënt taken uit te voeren en om te automatiseren is het proces van abstraheren een belangrijke fase om te kunnen groeien en een successleutel om te kunnen verbeteren.
Het leren kritisch analyseren, het planmatig denken, het generaliseren en het flexibel denken zijn vaardigheden die aan bod komen in wiskundige denkprocessen.
Ook bij het maken van keuzes en het overzien van de consequenties is abstraheren belangrijk.

2 In onze technologisch georiënteerde maatschappij is er een grote vraag naar praktisch bruikbare en concrete wiskunde. Wiskundige modellen en structuren hebben de kracht om in essentie vast te leggen op welke manier kennis en vaardigheden snel en correct kunnen worden getransfereerd naar andere contexten. Eenzelfde methode of redenering kan ingezet worden in verschillende domeinen.

3 Leerlingen moeten in de eerste graad de kans krijgen om hun talenten te ontdekken. Leerlingen met wiskundig talent zullen doorgaans een goed ontwikkeld vermogen hebben om abstracte wiskundige redeneringen te begrijpen en op te bouwen. We moeten deze leerlingen de kans geven om te detecteren of ze aanleg hebben voor de 'eigenheid van het wiskundig denken': beschrijven en verklaren van verschijnselen, processen en verbanden, gebruiken van de formele wiskundetaal, werken binnen een ordeningskader, redeneren vanuit modellen en structuren en transfereren van wiskundige kennis en vaardigheden naar diverse contexten.
Leerlingen laten proeven van abstracte en formele wiskunde en ze in de eerste graad de kans geven om hun wiskundige competenties maximaal te ontplooien op hun niveau is belangrijk opdat ze een weloverwogen en onderbouwde keuze kunnen maken uit het studieaanbod in de tweede en derde graad.

4.2.2.3 Besluit

Het komen tot een zekere mate van abstractie is voor de drie functies belangrijk. Het kunnen abstraheren is een essentieel onderdeel van het kunnen probleemoplossend denken, een belangrijk accent van ons wiskundeonderwijs.

De vraag is dus niet zo zeer of het zinvol is om de leerlingen te leren abstraheren maar wel op welke manier we de leerlingen dit kunnen leren.

Bijkomend kan de vraag gesteld worden of de 3 functies voldoende geëxpliciteerd worden in ons huidig wiskundeonderwijs, zowel op het niveau van de doelen als de didactische aanpak.
De doelen van het wiskundeonderwijs in de eerste graad A-stroom moeten rekening houden met de leerling aan wie ze onderwezen worden, met de maatschappij waarbinnen die leerling zal functioneren en met de eigenheid van het vak zelf.

Een andere vraag die kan gesteld worden is of de wiskundige leerinhouden van het huidige programma het meest geschikt zijn om deze doelen te bereiken.

4.2.3 Hoe leren we abstraheren?

4.2.3.1 Authentiek of levensecht leren

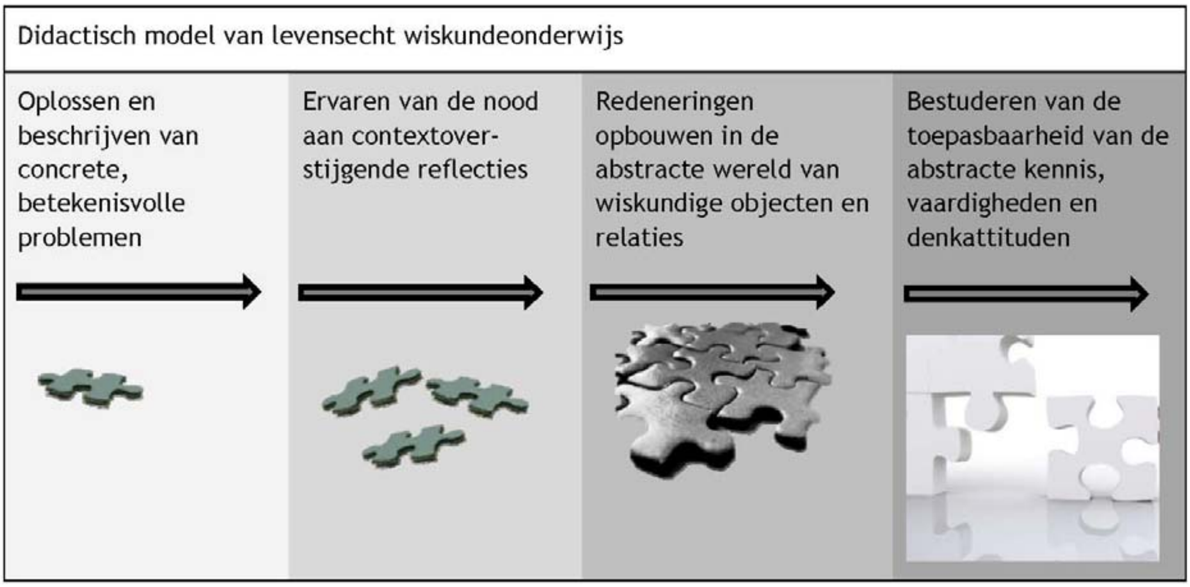
In ons hedendaags onderwijs heeft de visie van het levensecht leren sinds geruime tijd zijn intrede gedaan.

Voor het wiskundeonderwijs betekent dit dat in de lessen zoveel mogelijk geprobeerd wordt te starten vanuit concrete, betekenisvolle en realistische probleemsituaties. Vanuit deze concrete voorbeelden wordt vervolgens de behoefte gecreëerd tot contextoverstijgende reflecties om uiteindelijk de wereld van de abstractere wiskunde te betreden.

Hierbij wordt vastgesteld dat het voor leerlingen vaak moeilijk is om een vertrouwd referentiekader, in de vorm van concrete contexten, los te laten om een nieuw onbekend denkkader, gedomineerd door zuiver wiskundige objecten en relaties, te exploreren. Het wordt gemakkelijker naarmate de oorspronkelijk abstracte wereld van de wiskunde meer vertrouwd en betekenisvol wordt voor de leerlingen. Als de leerlingen bovendien inzien dat de kennis, vaardigheden en denkattituden opgebouwd door contextloze redeneringen functioneel inzetbaar zijn bij het oplossen van een brede waaier van concrete problemen, zullen ze beter in staat zijn om een betekenisvol relatienetwerk van wiskundige objecten verder uit te bouwen. Op dat moment hebben we als leerkrachten ons doel bereikt.

Het didactisch model van het levensecht leren lijkt ook vanuit historisch perspectief verantwoord. Een aanzienlijk deel van de wiskunde is ontwikkeld naar aanleiding van concrete noden. Zo was meetkunde aanvankelijk een geheel van praktische kennis over lengtes, oppervlakten en volumes.

Dit model sluit ook perfect aan bij de huidige onderwijsvernieuwing waarbij een verschuiving kan waargenomen worden van kennisgericht naar competentiegericht onderwijs.



4.2.3.2 Leerstijlentheorie

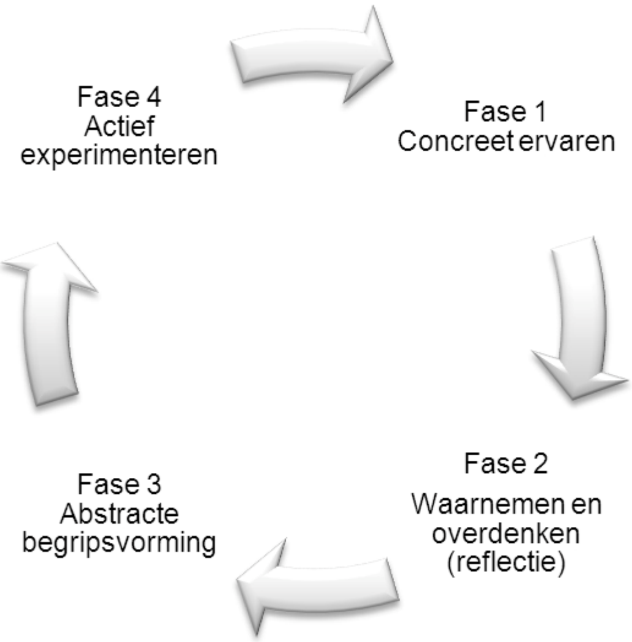
4.2.3.2.1 De theorie

Een van de meest aanvaarde theorieën in het Vlaamse onderwijs is die van Kolb. De psycholoog Kolb deed onderzoek naar verschillende manieren van leren. Hij onderscheidde vier van elkaar afhankelijke fasen en beschreef ze in termen van vaardigheden.

- Concreet ervaren ('feeling')
- Waarnemen en overdenken ('watching')
- Abstracte begripsvorming ('thinking')
- Actief experimenteren ('doing')

Deze vier fasen volgen logisch op elkaar: als men iets meemaakt (ervaring) is het belangrijk daarna de ervaringen te overdenken (reflectie) en te generaliseren (begripsvorming). Daarna kan men dan een aanpak bedenken waarmee een overeenkomstige gebeurtenis tegemoet kan getreden worden (experimenteren).

Als die nieuwe aanpak, het geleerde gedrag, daadwerkelijk gebruikt wordt, doet men weer nieuwe ervaringen op (concrete ervaring) waarover weer kan nagedacht worden (reflectie), zodat er nieuwe inzichten verkregen worden (begripsvorming). Op grond van het model is het mogelijk allerlei verschillende leerervaringen te ordenen. Kolb beschreef een ideaal leermodel waarin de vier fasen zich voortdurend herhalen. Dit leermodel kan voorgesteld worden als een cyclisch of spiraalvormig proces.



Het is niet nodig altijd met een concrete ervaring (bovenaan de cirkel) te beginnen. Wel kan gesteld worden dat men na de geboorte begint met ervaren en dat ervaren mede daarom het natuurlijke begin van het leren is. Later kan een voorkeur ontstaan om het leerproces te starten met een andere fase.

Een voorbeeld
Als men voor het eerst een dvd-speler moet bedienen, kan men op diverse manieren uitzoeken hoe het ding werkt.

Men kan allerlei knoppen indrukken (experimenteren) en kijken wat er gebeurt (ervaring en waarschijnlijk ook reflectie). Men kan ook nadenken over wat men weet over soortgelijke apparaten, bijvoorbeeld over videorecorders, want die lijken qua bediening op elkaar (reflectie). Zo krijgt men een idee over de bediening (begripsvorming) en dat idee toetst men dan in de praktijk (experimenteren).

Een andere mogelijkheid is dat men iemand vraagt om voor te doen hoe het apparaat bediend moet worden (ervaring), zodat men zelf een beeld over de bediening kan vormen (reflectie, begripsvorming) dat men vervolgens in de praktijk uitprobeert (experimenteren).

Het is natuurlijk mogelijk de leerfasen in een andere volgorde te doorlopen of een fase over te slaan. Wanneer fasen worden overgeslagen of te snel worden doorlopen daalt het leerrendement: ervaring wint aan waarde als men erover nadenkt, inzichten worden pas echt bruikbaar als men ze uitprobeert (experimenteren) en toetst (ervaring, reflectie).

4.2.3.2.2 Vier leerstijlen

In het voorgaande werd gesteld dat men zich het leerproces kan voorstellen als een cyclisch proces van vier fasen die in de gunstigste situatie altijd in dezelfde volgorde (maar niet altijd vanuit hetzelfde beginpunt) worden doorlopen. Mensen hebben echter voorkeuren voor bepaalde fasen uit die cyclus, ze beginnen bij voorkeur in één bepaalde fase of besteden er de meeste tijd aan.

Leerstijl volgens Kolb	De leerder	De leerder verkiest
De dromer of observeerder	leert het best vanuit concrete ervaringen, kan leerstof vanuit verschillende invalshoeken bekijken en legt verbanden	een leraar die graag demonstraties en uitleg geeft; deze leraar wil dat zijn leerlingen leren door observeren en waarnemen
De denker of theoreticus	zoekt de logische samenhang tussen leerstofonderdelen, houdt van	een leraar die zijn leerlingen complexe vraagstellingen

	theoretische modellen, denkt in heldere, abstracte termen	voorschotelt om ze zo via logisch denken tot theorie te brengen
De toepasser of beslisser	wil problemen oplossen, denkt doelgericht en planmatig en houdt ervan begrippen en theorieën toe te passen	een leraar die een korte, gestructureerde uitleg geeft, waarna de leerlingen aan de slag gaan, vaak via stappenplannen; deze leraar stimuleert zijn leerlingen om toepassingsmogelijkheden te zoeken
De doener of ondernemer	leert door te doen, kan zich goed aan nieuwe situaties aanpassen en wil tastbare resultaten bereiken; experimenteert graag met taal en techniek	een leraar die het liefst open opdrachten geeft waardoor deze leraar veel variatie in zijn werkvormen legt

4.2.3.2.3 Verband met het didactisch model van het levensecht leren

De 4 fasen die Kolb beschrijft zijn perfect te linken aan de 4 fasen van het didactisch model van het levensecht leren. Een belangrijke kanttekening is echter dat Kolb geen volgorde vastlegt en het leren beschrijft als een cyclisch proces dat vanuit iedere fase kan gestart worden.

4.2.3.3 Het model onder de (kritische) loep

De laatste jaren werd het model van het realistisch wiskundeonderwijs zowel vanuit wiskundig standpunt als vanuit pedagogisch-didactisch standpunt kritisch bekeken en onderzocht. Hieronder worden drie reacties weergegeven.

4.2.3.3.1 Jo Nelissen - Freudenthal Instituut aan de Universiteit Utrecht- februari 2008

“Toch is het een interessante vraag of leerlingen die meer naar abstract denken neigen nog voldoende aan hun trekken komen in een onderwijsomgeving waarin authentiek leren voorop staat. Zoals in een eerder onderwijssysteem creatievelingen in de verdrukking konden komen door een nogal statische, abstracte en analytische behandeling van de leerstof, zou dat in vernieuwingsonderwijs kunnen gelden voor de 'reproductievelingen', degenen die graag willen weten hoe iets nu precies zit.”

4.2.3.3.2 Jan Kaldeway – Remedial teacher en docent pedagogiek – 2007

“Voor bepaalde leerlingen is mogelijk het nieuwe leren[1] de betere (eerste) insteek voor het verwerven van inzicht, mits gevolgd door abstractie van de voorbeelden. Voor andere groepen leerlingen zou het wenselijk kunnen zijn eerst de droog-abstracte principes te introduceren en daarna het ‘nieuwe leren’ in praktijk te brengen.”

4.2.3.3.3 J. Kaminski - Center for Cognitive Science, Ohio State University, Columbus, USA - 2008

“If a goal of teaching mathematics is to produce knowledge that students can apply to multiple situations, then presenting mathematical concepts through generic instantiations, such as traditional symbolic notation, may be more effective than a series of “good examples”.
This is not to say that educational design should not incorporate contextualized examples. What we are suggesting is that grounding mathematics deeply in concrete contexts can potentially limit its applicability. Students might be better able to generalize mathematical concepts to various situations if the concepts have been introduced with the use of generic instantiations.”

[1] Authentiek of levensecht leren

4.2.3.4 Besluit

Discussiepunten:

- **Zijn we voorstanders van realistisch wiskundeonderwijs** of is het de afwisseling van aanpak, inspelend op leer- en denkstijlen die zal bijdragen tot het leren abstract denken?
  Is de aanpak afhankelijk van het doel? Leren leerlingen met wiskundig talent beter vanuit abstracte modellen?
- **Zijn onze leerkrachten voldoende ondersteund om realistisch wiskundeonderwijs te brengen?** Zijn er voldoende hulpmiddelen ter beschikking? Zijn ze voldoende gevormd?
- **Biedt de huidige structuur van het secundair onderwijs voldoende ruimte en kansen om realistisch wiskundeonderwijs te realiseren?**

4.2.4 De leerkracht sterk maken

4.2.4.1 Marzano: ‘Wat werkt op school?’

4.2.4.1.1 Het onderzoek

De Amerikaanse onderwijswetenschapper Robert Marzano voerde een meta-analyse uit op de onderwijsresearch van de laatste 35 jaar. Daarbij maakte hij gebruik van zowel Canadees, Amerikaans als Europees onderzoek. Hij was op zoek naar onderwijsveranderingen die daadwerkelijk invloed hebben op de leerprestaties van leerlingen.

Uit de meta-analyse van 1.200 onderwijsonderzoeken is gebleken dat er 11 factoren zijn die een positieve invloed hebben op de leerprestaties. Vervolgens is per factor op basis van de onderzoeken vastgesteld welke zaken specifiek tot hogere leerprestaties leiden.

Hieronder zijn de factoren schematisch[2] weergegeven.

4.2.4.1.2 Leerkrachtniveau

Marzano stelde vast dat het grootste deel van het effect wordt bepaald door het vakmanschap van de leraar: 67%.

De drie factoren op leraarniveau:

Didactische aanpak refereert aan het gebruik van onderwijstechnieken waarvan een grondige onderzoeksbasis de effectiviteit heeft bewezen. Een efficiënte leraar beschikt niet alleen over een uitgebreid repertoire aan dergelijke strategieën, maar kan ook moeiteloos bepalen welke strategieën het best gebruikt kunnen worden in combinatie met bepaalde leerlingen of bepaalde lesonderwerpen.

Klassenmanagement refereert aan het gebruik van de leraar van manieren om het leergedrag van zijn/haar leerlingen positief te beïnvloeden, manieren waarvan de effectiviteit door middel van uitgebreid onderzoek bewezen is. Wat vooral effect heeft ligt op 4 terreinen: routines en regels in de klas, omgaan met ongewenst gedrag, de relatie leraar-leerling, de mentale instelling van de leraar.

Het herontwerpen van het programma refereert aan de noodzaak dat de leraren het tempo en het niveau van de lesinhoud aanpassen aan het werkelijke niveau van de leerlingen, waarbij ze zowel de technieken uit didactische aanpak hanteren als algemene leerprincipes. Het kunnen toepassen van de juiste leerprincipes is hier cruciaal.

---

[2] Wat werkt op school! is een gezamelijk project van Bazalt, HCO, DOBA Onderwijsadviseurs en OnderwijsAdvies

4.2.4.2 Uitgangspunt

De leerkracht kan het verschil maken. We willen bij deze conferentie dan ook graag focussen op de ondersteuning van de leraar wiskunde. We willen zicht krijgen op het antwoord op onderstaande vragen vanuit het standpunt van het ondersteunen van het vakmanschap van de leerkracht.

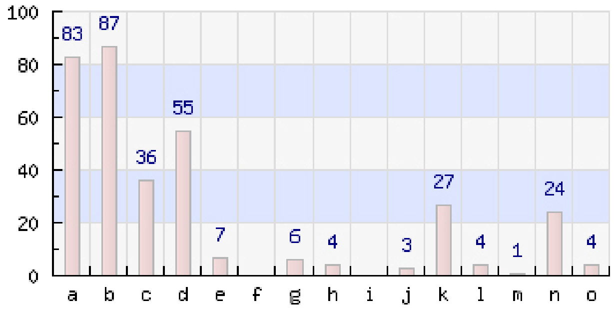
- Moet er iets wijzigen aan de eindtermen en de leerplannen? Zo ja, wat?
- Welke ondersteuning moeten pedagogische begeleidingsdiensten voorzien?
- Welke hulpmiddelen moeten ter beschikking zijn?
- Welke factoren in schoolbeleid spelen een rol?
- Wat moet er wijzigen aan de lerarenopleiding?

4.2.5 Leerkrachtenbevraging

In de periode oktober-november 2010 organiseerde de pedagogische begeleidingsdienst van het GO! een enquête via het digitaal leerplatvorm Smartschool. 98 leerkrachten wiskunde van de eerste graad A-stroom gaven hun mening over een aantal items.

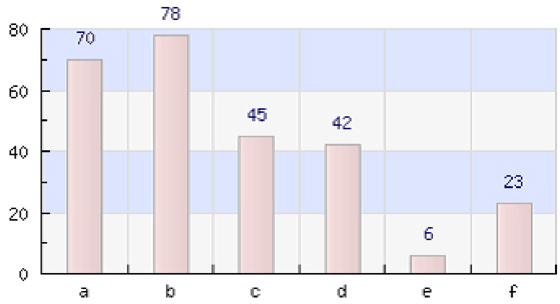
Enkele resultaten:

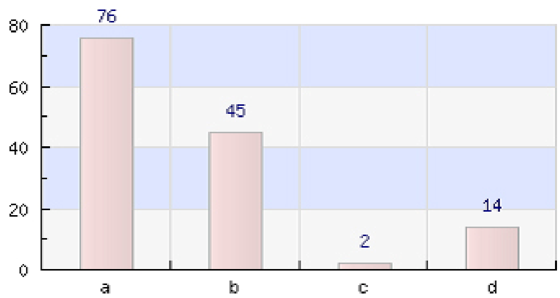
Welke basisopties biedt uw school aan in het tweede leerjaar van de A-stroom?		
a	Latijn	83
b	Moderne wetenschappen	87
c	Sociale en technische vorming	36
d	Handel	55
e	Industriële wetenschappen	7
f	Agro- en biotechnieken	0
g	Artistieke vorming	6
h	Bouw- en houttechnieken	4
i	Creatie en vormgeving	0
j	Grafische communicatie en media	3
k	Grieks-Latijn	27
l	Hotel-Voeding	4
m	Maritieme technieken	1
n	Mechanica en elektriciteit	24
o	Topsport	4



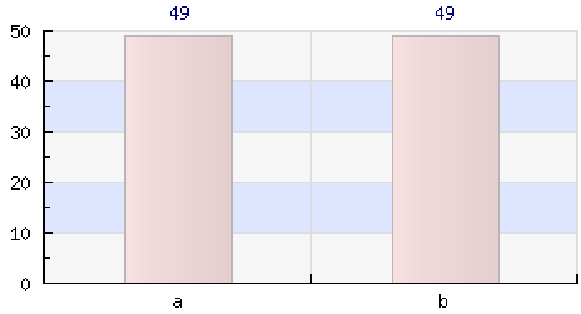
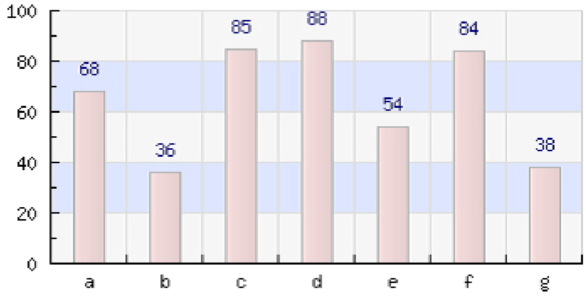
Nagenoeg alle leerkrachten die deelgenomen hebben aan de enquête geven les in de basisopties Latijn en Moderne Wetenschappen; iets meer dan de helft van de leerkrachten geeft (ook) les aan de leerlingen van de basisoptie Handel. Verder geven 25% of meer van de leerkrachten (ook) les aan leerlingen van Sociale en technische vorming, Grieks-Latijn en Mechanica en elektriciteit.

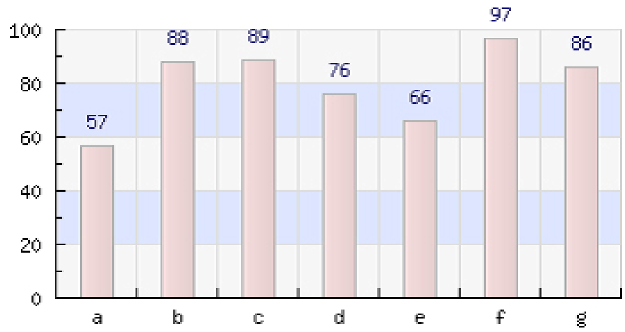
Welke verklaringen vindt u aannemelijk voor de zwakke resultaten van het peilingsonderzoek wiskunde 1e graad A-stroom?

<table>
<tr><td>a</td><td>verkeerde oriëntatie</td><td>70</td><td rowspan="6">

Meer dan ⅔ van de leerkrachten die deelgenomen hebben aan de enquête menen dat de zwakke resultaten van het peilingsonderzoek wiskunde 1e graad A-stroom te wijten zijn aan het feit dat er in de klassen te veel leerlingen zitten die fout georiënteerd zijn en/of extra zorg nodig hebben. Verder vinden iets minder dan de helft van de deelnemers dat de eindtermen niet haalbaar zijn voor alle leerlingen en/of dat er in de eerste graad A-stroom minder sturing mogelijk is door de ouders aannemelijke verklaringen voor de zwakke resultaten. Ongeveer ¼ van de deelnemers duidt de puberteit aan als reden. Slechts 6 van de 98 leerkrachten vinden dat er te veel verschillende leerkrachten les geven per leerjaar een verklaring is.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>in klassituaties te veel leerlingen met extra zorg</td><td>78</td></tr>
<tr><td>c</td><td>de eindtermen zijn gewoon niet haalbaar voor alle leerlingen</td><td>45</td></tr>
<tr><td>d</td><td>er is minder hulp en sturing van de ouders mogelijk</td><td>42</td></tr>
<tr><td>e</td><td>te veel verschillende leerkrachten per leerjaar</td><td>6</td></tr>
<tr><td>f</td><td>Puberteit</td><td>23</td></tr>
<tr><td colspan="4">Merkt u in uw school dat de leerplandoelen wiskunde A-stroom gemakkelijker bereikt worden door leerlingen van bepaalde basisopties? Duid alle basisopties aan waar meer leerlingen de leerplandoelen gemakkelijker behalen.</td></tr>
<tr><td>a</td><td>Klassieke talen</td><td>76</td><td rowspan="4">

¾ van de deelnemers ondervindt dat de leerplandoelen wiskunde eerste graad A-stroom gemakkelijker behaald worden door leerlingen van de basisopties Klassieke talen. Iets meer dan de helft van de leerkrachten vindt dat dit ook geldt voor de leerlingen van Moderne wetenschappen.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Moderne wetenschappen</td><td>45</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Technische opties</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Andere</td><td>14</td></tr>
<tr><td colspan="4">Vindt u dat er verschillende leerplannen wiskunde zouden moeten zijn voor leerlingen van verschillende basisopties?</td></tr>
<tr><td>a</td><td>Ja</td><td>49</td><td></td></tr>
</table>

b	Nee	49	 Bij deze vraag zijn de meningen duidelijk verdeeld. De helft van de deelnemende leerkrachten vindt dat er afhankelijk van de basisoptie een ander leerplan wiskunde kan zijn, de andere helft vindt dat er één leerplan wiskunde moet blijven bestaan dat geldt voor alle leerlingen van de eerste graad A-stroom.
Welke van onderstaande leerplandoelen vindt u HAALBAAR voor ALLE leerlingen in de eerste graad A-stroom?			
a	De leerlingen kunnen een onderzoek instellen naar de eigenschappen van de bewerkingen.	68	 De grote meerderheid van de deelnemende leerkrachten vindt het rekenen met veeltermen en eentermen en het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen haalbare leerstofitems voor de leerlingen van de eerste graad A-stroom. Een minderheid leerkrachten vindt de leerplandoelen in verband met veeltermen ontbinden in factoren en vraagstukken die aanleiding geven tot eerstegraadsvergelijkingen haalbaar.
b	De leerlingen kunnen eenvoudige veeltermen ontbinden in factoren.	36	
c	De leerlingen kunnen eenvoudige veeltermen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.	85	
d	De leerlingen kunnen machten van eentermen met natuurlijke exponenten berekenen.	88	
e	De leerlingen kunnen de merkwaardige producten $(A + B)^2$ en $(A + B)(A - B)$ toepassen.	54	
f	De leerlingen kunnen een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.	84	
g	De leerlingen kunnen eenvoudige vraagstukken die leiden tot vergelijkingen (1e graad, 1 onbekende) oplossen	38	

<table>
<tr><th colspan="4">Welke van onderstaande leerplandoelen vindt u ZINVOL voor ALLE leerlingen in de eerste graad A-stroom?</th></tr>
<tr><td>a</td><td>De leerlingen kunnen een onderzoek instellen naar de eigenschappen van de bewerkingen.</td><td>57</td><td rowspan="7">

Zeer veel deelnemende leerkrachten vinden eerstegraadsvergelijkingen en vraagstukken en rekenen met veeltermen zinvolle leerstofitems voor de leerlingen van de eerste graad A-stroom. De zinvolheid van de eigenschappen van bewerkingen en het ontbinden in factoren van veeltermen wordt door ongeveer 1/3 van de leerkrachten in vraag gesteld.

Opvallend in vergelijking met de vorige vraag is vooral dat zeer veel deelnemende leerkrachten vinden dat vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een eerstegraadsvergelijking zinvol is maar dat heel wat deelnemers aangeven dat dit leerstofitem niet haalbaar is voor alle leerlingen van de eerste graad A-stroom.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>De leerlingen kunnen eenvoudige veeltermen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.</td><td>88</td></tr>
<tr><td>c</td><td>De leerlingen kunnen machten van eentermen met natuurlijke exponenten berekenen.</td><td>89</td></tr>
<tr><td>d</td><td>De leerlingen kunnen de merkwaardige producten $(A + B)^2$ en $(A + B)(A - B)$ toepassen.</td><td>76</td></tr>
<tr><td>e</td><td>De leerlingen kunnen eenvoudige veeltermen ontbinden in factoren.</td><td>66</td></tr>
<tr><td>f</td><td>De leerlingen kunnen een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.</td><td>97</td></tr>
<tr><td>g</td><td>De leerlingen kunnen eenvoudige vraagstukken die leiden tot vergelijkingen (1e graad, 1 onbekende) oplossen.</td><td>86</td></tr>
</table>

4.3 Op weg naar lange leerlijnen. De kloof tussen basis- en secundair onderwijs moet niet overbrugd maar gedicht worden. Prof. Dr. Wim Van Dooren, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie, Katholieke Universiteit Leuven

4.3.1 Inleiding

In de resultaten van de peilingen wiskunde in de eerste graad van het secundair onderwijs valt in de eerste plaats op dat er een behoorlijke uitval is voor een aantal deelgebieden zoals dat van de bewerkingen (getallenleer) en dat van het rekenen met veeltermen (algebra). Dat is met name het geval voor leerlingen die een technische optie volgen, maar ook voor de anderen is het percentage leerlingen dat de eindtermen bereikt problematisch laag.

Vooraleer we zoeken naar mogelijke verklaringen en mogelijke conclusies die uit deze gegevens kunnen getrokken worden, willen we alvast twee zaken benadrukken.

Ten eerste moeten we er ons zeer goed van bewust zijn dat het leerlingen uit het basisonderwijs zijn die in het secundair onderwijs instromen, en dat die leerlingen al bepaalde moeilijkheden kunnen hebben. Hoewel de resultaten voor de wiskundepeiling voor het basisonderwijs behoorlijk goed waren, bleek dat er ook op dat niveau leerlingen al moeite hebben met opgaven in een bepaald deelgebied, en dus de eindtermen voor dat deelgebied niet behalen. Toch zullen heel wat van hen doorstromen naar het secundair onderwijs omdat ze globaal genomen voldoende presteren. Het spreekt dan voor zich dat we de gevolgen hiervan zien in peilingsresultaten voor het secundair onderwijs. De moeilijkheden stapelen zich immers op.

Ten tweede – en dit zal verderop in de tekst ook nog aan bod komen – willen we pleiten voor het nemen van een langetermijnperspectief. We moeten dus verder kijken dan de eerste graad. In dit specifieke geval lijkt het niet uitgesloten dat de moeilijkheden die leerlingen ondervinden slechts van een tijdelijke aard zijn. Het gaat namelijk om deelgebieden waar het curriculum als het ware een versnelling hoger wordt geschakeld: de leerlingen moeten op een erg abstracte manier bewerkingen gaan uitvoeren, en operaties uitvoeren met veeltermen. Dergelijke abstractie kan aanvankelijk moeilijk verlopen bij leerlingen met een lichte terugval tot gevolg, terwijl in de latere jaren een verbetering optreedt. De peiling in de tweede graad van het secundair onderwijs zal moeten uitwijzen of dit daadwerkelijk gebeurt of niet.

Toch zijn de peilingsresultaten allesbehalve geruststellend te noemen, en een grondige reflectie over wat er zou kunnen gebeuren door de diverse actoren in het onderwijs dringt zich op. In wat volgt zullen we ingaan op de analyse van een aantal problemen die we – vanuit onze achtergrond als onderzoeker in de onderwijspsychologie en wiskundedidactiek – menen te onderkennen in de peilingsresultaten, en op de eventuele gevolgen daarvan voor het wiskundeonderwijs. Daarbij zal onmiddellijk duidelijk worden dat – hoewel de grootste moeilijkheden zich manifesteren in de eerste graad van het secundair onderwijs – er ook in (de bovenbouw van) het basisonderwijs al heel wat nuttige stappen kunnen worden gezet. We zullen twee cases behandelen waarbij leerlingen bij de overgang van basis- naar secundair onderwijs belangrijke en niet-evidente stappen in de abstractie moeten zetten. Telkens gaan we in op onderzoek dat aangeeft waarom abstractie in die gevallen geen evidentie is, en wat de implicaties voor het onderwijs kunnen zijn.

4.3.2 Wanneer getallen niet meer zijn wat ze waren

Doorheen het wiskundecurriculum krijgen leerlingen met alsmaar abstractere leerinhouden te maken. Deze abstractie gebeurt geleidelijk aan, en het vigerende idee is dat de nieuwe kennis altijd kan worden geënt op de voorkennis die leerlingen al hebben. Nochtans is dat niet altijd zonder meer het geval. Er zijn ook situaties waarin leerlingen hun voorkennis grondig moeten herzien.

Een van die gevallen is de laatste jaren erg goed gedocumenteerd in de cognitief-psychologische en wiskundedidactische literatuur. Kinderen ontwikkelen al op vroege leeftijd een getalgevoel. Dat getalgevoel is in eerste instantie een “natuurlijk getalgevoel”, gebaseerd op de activiteit van tellen, en het principe dat de getallen elkaar een na een opvolgen. Maar vanaf de bovenbouw van het basisonderwijs is een belangrijke onderwijsdoelstelling het nastreven van het rationale getalbegrip. Het blijkt echter dat leerlingen bij het leren over rationale getallen vaak beïnvloed worden door hun voorkennis over natuurlijke getallen. Dit fenomeen wordt ook geduid als “natural number bias” (Ni & Zhou, 2005). Leerlingen van diverse leeftijden (en ook volwassenen) blijken systematisch fouten te maken in die gevallen waarin rationale getallen zich anders “gedragen” dan natuurlijke getallen. Tegelijk kunnen ze wel vlot correct antwoorden op taken waar de principes voor natuurlijke getallen wel gelden. In tabel 1 worden de belangrijkste verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen opgesomd.

Tabel 1

Getalconcept bij kinderen voor instructie in rationale getallen	*Wiskundig concept van rationale getallen*
▪ Getallen zijn resultaat van tellen	▪ Niet geënt op de telactiviteit

▪ Getallen zijn discreet. Er zijn geen andere getallen tussen een getal en zijn "opvolger"	▪ Dicht: tussen twee niet gelijke getallen zijn er oneindig veel andere
▪ Er is een kleinste getal (0 of 1)	▪ Er is geen kleinste getal
▪ Getallen kunnen worden geordend op basis van hun positie in de telrij	▪ De ordening is niet gebaseerd op tellen
▪ "Langere" getallen zijn groter	▪ "Langere" getallen zijn niet noodzakelijk groter
▪ Optellen en vermenigvuldigen "maken groter" ▪ Aftrekken en delen "maken kleiner"	▪ De grootte van de uitkomst hangt af van de betrokken getallen, en niet van de operatie
▪ Elk getal heeft één symbolische representatie	▪ Elk getal kan uitgedrukt worden als breuk of decimaal getal. Bovendien zijn er verschillende manieren om een getal als breuk of decimaal te schrijven.

De moeilijkheden die leerlingen hebben met de verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen zijn de afgelopen jaren uitvoerig onderzocht. We gaan exemplarisch in op vier soorten taken en de bijhorende onderzoeksresultaten: vergelijkingstaken, het effect van rekenkundige operaties, het interpreteren van algebraïsche uitdrukkingen, en de dichtheid van de getallenlijn.

4.3.2.1 Vergelijkingstaken

Om rationaal getalbegrip te onderzoeken worden vaak vergelijkingstaken gebruikt. Bij vergelijkingen van decimale getallen wordt in onderzoek vaak vastgesteld dat de kennis over natuurlijke getallen interfereert in de redeneringen van leerlingen. Zo zullen ze vaak antwoorden volgens het principe "*langere decimale getallen zijn groter*", hetgeen uiteraard tot correcte antwoorden kan leiden (2,15 > 2,1) maar evengoed helemaal niet (2,12 > 2,2). Onderzoek wijst uit dat dit soort fouten typisch wordt gemaakt op het moment dat leerlingen voor het eerst geconfronteerd worden met decimale getallen, maar het neemt af met de leeftijd en komt nog slechts zelden voor bij volwassenen (Stacey et al., 2001).

Maar andere fouten bij vergelijkingstaken worden wel nog steeds bij volwassenen aangetroffen. Bij het vergelijken van twee breuken is een belangrijk inzicht dat de grootte van de breuk afhangt van de relatie tussen de teller en de noemer. Maar leerlingen zijn aanvankelijk geneigd de uitdrukking a/b te interpreteren als twee onafhankelijke natuurlijke getallen die door een lijntje gescheiden worden (bijv. Stafylidou & Vosniadou, 2004). Daardoor besluiten ze soms dat een breuk groter wordt wanneer de noemer, de teller of beide groter worden. Dit kan leiden tot correcte vergelijkingen zoals 2/5 < 3/5, maar evengoed tot fouten zoals 2/5 < 2/7 of 2/3 < 4/10.

Recent onderzoek bij volwassenen (bijv. Meert, Gregoire, & Noel, 2009) heeft aangetoond dat zij nog steeds de componenten van een breuk apart verwerken. Ze maken nog maar weinig fouten bij het vergelijken van breuken door interferentie van natuurlijke-getallenredeneringen, maar ze hebben nog steeds meer tijd nodig om correct te antwoorden wanneer die redeneringen geïnhibeerd moeten worden, dan wanneer die redeneringen wel tot het correcte antwoord leiden.

Het belang van dit soort fouten voor de peilingsresultaten in de eerste graad van het secundair onderwijs moet echter niet overschat worden: De fouten zijn van voorbijgaande aard, en ze hebben wellicht geen grote invloed gehad op de prestaties in de afgenomen peilingstoetsen. Dat is wellicht anders voor de andere taken waarin de voorkennis over natuurlijke getallenkennis interfereert, en die hieronder besproken worden.

4.3.2.2 Het effect van rekenkundige bewerkingen

Er is een enorm verschil tussen de natuurlijke en de rationale getallen wanneer we kijken naar het effect van de vier rekenkundige bewerkingen. Binnen de verzameling van natuurlijke getallen weten we dat – wanneer we twee getallen vermenigvuldigen of bij mekaar optellen – de uitkomst altijd groter is dan de oorspronkelijke getallen. Zo ook weten we dat wanneer we een getal van een ander aftrekken of het er door delen, de uitkomst kleiner is dan het aftrektal of het deeltal. Maar dit geldt niet noodzakelijk binnen de verzameling van rationale getallen. Het effect van de bewerkingen hangt daar af van de specifieke getallen. Zo is 3 + (-5) kleiner dan 3, en is 8 ÷ 0.5 groter dan 8.

Fischbein et al. (1985) hebben aangetoond dat leerlingen intuïtieve modellen voor de rekenkundige bewerkingen hanteren. Zo associëren ze optellen met *samenvoegen,* aftrekken met *wegnemen,* vermenigvuldigen met *herhaald optellen* en delen met *eerlijk verdelen.* Deze intuïtieve modellen functioneren impliciet en ze bepalen de verwachtingen die leerlingen hebben over het effect van de operaties. Onderzoek heeft aangetoond dat bij de uitbreiding van de natuurlijke naar de rationale getallen het idee dat "*vermenigvuldigen maakt groter*" en "*delen maakt kleiner*" nog lang van invloed is, en het wordt eveneens gerapporteerd bij volwassenen (Graeber, Tirosh, & Glover, 1989). Uit eigen recente studies zien we ook dat de idee dat "*optellen maakt groter*" en "*aftrekken maakt kleiner*" nog steeds aanwezig is bij Vlaamse leerlingen secundair onderwijs en bij volwassenen.

4.3.2.3 Het interpreteren van algebraïsche uitdrukkingen

Naast problemen met de eigenschappen van natuurlijke en rationale getallen binnen de rekenkunde, blijken leerlingen ook fouten te maken bij de interpretatie van lettersymbolen binnen algebra. Ook hier blijkt de voorkennis over natuurlijke getallen een rol te spelen (Christou et al., 2007).

Wanneer leerlingen lettersymbolen zien als getallen, dan denken ze vaak onterecht dat een lettersymbool slechts voor één uniek getal staat. De letter 'a' bijvoorbeeld staat volgens hen enkel voor het getal 2 en kan dan geen andere waarden meer aannemen. In tegenstelling tot wat veel leerlingen denken, kan x+p+z dus ook staan voor 2+2+2. Leerlingen hebben het moeilijk om te aanvaarden dat a+b+c = a+e+c, omdat ze denken dat de letter 'b' voor een ander getal staat dan de letter 'e'. Een andere veel voorkomende fout is 'de gebrek-aan-sluitings-fout'. Wanneer leerlingen een bepaalde oplossing moeten geven voor een wiskundig probleem, aanvaarden ze een algebraïsche uitdrukking zoals 2x niet als finaal antwoord. Ze hebben de neiging om steeds een numeriek antwoord te geven en de uitdrukking te vervangen door een specifiek getal.

Tot slot hebben variabelen, in tegenstelling tot natuurlijke getallen, een 'phenomenal sign'. Dit is het positieve of negatieve teken dat een variabele op het eerste zicht heeft. De waarde voor een variabele kan slechts bepaald worden wanneer er een specifiek getal in de variabele wordt ingevuld. Zo kan de variabele 'x' zowel positief als negatief zijn (bijvoorbeeld 2 en -2). Ook de variabele '-x' kan zowel positief als negatief zijn, want enerzijds kan -2 voorkomen en anderzijds wordt -(-2) gezien als +2. Deze gedachtegang is niet voor alle leerlingen onmiddellijk duidelijk. Onderzoek heeft aangetoond dat leerlingen tot op het einde van het secundair onderwijs fouten blijven maken omdat ze lettersymbolen vaak enkel interpreteren als natuurlijke getallen en niet als breuken, decimalen of andere niet-natuurlijke getallen. Wanneer leerlingen gevraagd wordt waaraan de algebraïsche uitdrukkingen: 'a', '-b', '4d', '1/d', 'a/b', 'a+a+a' en 'k+3' gelijk kunnen zijn, dan zijn ze vaak geneigd om aan de letter enkel door een natuurlijk getal te vervangen. 'a' kan dan gelijk zijn aan 4, 5, 100, of 1254, maar niet aan -3, 0,54, of 6/87. '–b' kan gelijk zijn aan -6, -100, enzovoort, maar niet aan 87, 0,325, 1/3, enzovoort. En zo denken ze ook dat 'a/b' niet gelijk kan zijn aan 6, -12, of -0,6941.

4.3.2.4 Dichtheid van de getallenlijn

Een eigenschap die een duidelijk verschil maakt tussen de natuurlijke en de rationale getallenverzameling is de dichtheid van deze laatste: tussen iedere twee (niet-gelijke) rationale getallen liggen er oneindig veel andere rationale getallen, maar tussen twee natuurlijke getallen liggen er steeds maar een eindig aantal andere natuurlijke getallen. Heel wat onderzoek heeft aangetoond dat dit inzicht zeer moeilijk te verwerven is (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Leerlingen antwoorden dan dat er geen andere getallen liggen tussen 0,005 en 0,006 of tussen 1/2 en 1/3. Wanneer ze ouder worden erkennen leerlingen dan wel dat er andere getallen tussen liggen, maar ze gaan nog steeds uit van een eindig aantal (bijv. enkel 0,0051, 0,0052, …, 0,0059), waaruit blijkt dat ze nog steeds geen inzicht hebben in de dichte structuur van de rationale getallenverzameling. Recent onderzoek heeft aangetoond dat ook Vlaamse leerlingen in het vierde jaar van het secundair onderwijs nog steeds geen diepgaand inzicht in de dichtheid van de rationale getallenverzameling hebben verworven en dergelijke fouten maken (Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, in press).

4.3.2.5 Implicaties voor het onderwijs

Bij wiskundedidactische onderzoekers begint het besef te groeien dat het leren van wiskunde niet louter een proces van toenemende abstractie is, waarbij steeds verder gebouwd wordt op bestaande voorkennis, die enkel moet verrijkt en uitgebreid worden. Maar het is de vraag of dit besef ook is doorgedrongen tot in het curriculum, de wiskundemethoden en de klaspraktijk. We gaan er nog te vaak van uit dat het leren over de rationale getallen mogelijk is via het geleidelijk aanbieden van nieuwe informatie en het verrijken van voorkennis, zonder te beseffen dat de voorkennis *in de weg kan staan* van nieuwe kennis die leerlingen moeten verwerven. Het is wellicht onvermijdelijk om eerst te gaan rekenen met natuurlijke getallen, en daarbij uit te gaan van de voorkennis die jonge kinderen al hebben over getallen (namelijk als natuurlijke getallen). Op het moment dat leerlingen dan kennis maken met de rationale getallen (in eerste instantie breuken), dan gaan ze daar vooral op procedurele wijze mee om: breuken worden gecreëerd door taarten te verdelen, stukken worden nog eens verdeeld of samengevoegd, enzovoort. Vooral de gelijkenissen tussen natuurlijke en niet-natuurlijke getallen worden zo sterk benadrukt, om die laatste meer toegankelijk te maken. De deel/geheelinterpretatie van breuken – die toelaat om nog steeds in termen van natuurlijke getallen te redeneren – is daarvan een duidelijk voorbeeld. Maar net dit soort aanpak kan er op langere termijn toe leiden dat leerlingen denken dat breuken discreet in plaats van dicht zijn. Tegelijk worden de meer gesofisticeerde aspecten van de gelijkenis tussen natuurlijke en niet-natuurlijke getallen – die maken dat ze tot dezelfde familie van getallen behoren – niet voldoende benadrukt, bijvoorbeeld door breuken en decimale getallen apart te behandelen.

Het vereist een lange-termijnperspectief om op een goede manier om te gaan met de overgang tussen natuurlijke en rationale getallen. Een belangrijke eerste stap is wellicht om leerkrachten en curriculum- en handboekontwikkelaars bewust te maken van dit probleem en van de moeilijkheden die leerlingen ondervinden tijdens het leerproces. Wanneer het onderwijs expliciet ingaat op de moeilijkheden zoals hierboven beschreven en de oorzaken ervan ook ten volle onderkent, dan kunnen misschien betere resultaten worden bekomen. Ook bepaalde interventies die wellicht goed bedoeld zijn maar onbedoeld negatieve gevolgen kunnen hebben zouden op deze manier kunnen worden vermeden. In een Grieks wiskundehandboek lazen we ooit dat de rationale getallen de verzameling was van getallen bestaande uit “"alle getallen die we tot nu toe hebben bestudeerd, namelijk natuurlijke getallen, decimale getallen, breuken, en hun respectievelijke negatieve varianten". Wanneer we dit aan de leerlingen vertellen, dan hoeft het wellicht niet te verbazen dat leerlingen denken dat er tussen twee decimale getallen geen breuken liggen en omgekeerd. Dichter bij huis lazen we in een Vlaams wiskundehandboek dat "we de positieve en negatieve breuken en de decimale getallen samen de rationale getallen noemen”. Dergelijke pogingen om de getallenverzameling te definiëren op een eenvoudige manier bouwen voort op de voorkennis van de leerlingen, maar het is maar de vraag of ze op deze manier diepgaand inzicht bij de leerlingen zullen bijbrengen in de verzameling van rationale getallen.

4.3.3 Van rekenen naar algebra

Een tweede belangrijke leertaak waarmee leerlingen bij de overgang van de basisschool naar het secundair onderwijs worden geconfronteerd – en die hierboven (paragraaf 2.3.) al even aan bod kwam – is het verwerven van een algebraïsche redeneerwijze. Het is algemeen bekend dat het leren van algebra voor heel wat leerlingen niet probleemloos verloopt. In de onderzoeksliteratuur wordt wel eens van een echte “kloof” tussen rekenen en algebra gesproken.

In een eerste paragraaf gaan we kort in op onderzoek dat die kloof illustreert en probeert te verklaren. Daarna bekijken we een mogelijke uitweg, in de zin dat de laatste jaren wordt ingezien dat leerlingen reeds veel vroeger dan voorheen gedacht in staat zijn om (pre)algebraïsch te gaan redeneren, waardoor de overgang van rekenkundige naar algebraïsche redeneerwijzen veel geleidelijker kan verlopen. Tot slot bekijken we de vaardigheden en attitudes van (toekomstige) Vlaamse leraren basis- en secundair onderwijs met betrekking tot rekenkundig en algebraïsch redeneren, omdat daar een aantal implicaties voor de lerarenopleidingen uit volgen.

We zullen in de paragrafen een aantal keer verwijzen naar het volgende vraagstuk, dat zowel via rekenkundige als algebraïsche oplossingstechnieken kan worden aangepakt.

> *Een meubelfabriek gebruikt grote en kleine vrachtwagens om 632 kasten naar Duitsland te vervoeren. In een grote vrachtwagen passen 26 kasten, in een kleine 20 kasten. Als je weet dat in het konvooi 4 kleine vrachtwagens meer meereden dan grote vrachtwagens en dat alle vrachtwagens vol zaten, hoeveel vrachtwagens zijn er dan van elke soort meegereden*?

4.3.3.1 De kloof tussen rekenen en algebra

Er bestaat heel wat literatuur die spreekt over een daadwerkelijke "kloof" tussen een rekenkundige manier voor het oplossen van wiskundige problemen en een algebraïsche manier (bijv. Kieran, 1992; Linchevski & Herscovics, 1996).

Een eerste verschil is de manier waarop rekenkundige en algebraïsche oplossingswijzen een probleem representeren. In een algebraïsche oplossingswijze wordt een globale representatie van het probleem gemaakt: er wordt een onbekende gekozen en vervolgens wordt een vergelijking opgesteld die al de relaties uit het vraagstuk in één representatie samenvat. Bijvoorbeeld: wanneer x het aantal grote vrachtwagens is, dan geeft de vergelijking $26x + 20\ (x+4) = 632$ de wiskundige relaties in het vraagstuk uit de inleiding van paragraaf 3 volledig weer, en na het manipuleren van de vergelijking kan de waarde voor x worden gevonden en zo kan het vraagstuk worden opgelost. In rekenkundige oplossingswijzen vindt een heel ander proces plaats. De redenering wordt stapsgewijs uitgevoerd, en elke stap brengt de oplosser iets dichter bij de oplossing van het probleem. Neem bijvoorbeeld een leerling die opmerkt dat er in die 4 extra kleine vrachtwagens 80 kasten kunnen. Dan blijven er nog 632 – 80 = 552 kasten over die in evenveel grote als kleine vrachtwagens vervoerd worden. In een grote en kleine vrachtwagen passen samen 26 + 20 = 46 kasten, dus er reden bijkomend nog 552 : 46 = 12 grote en 12 kleine vrachtwagens mee. Samen dus 12 grote en 16 kleine vrachtwagens. Een andere rekenkundige benadering is die van het verstandig uitproberen, waarbij een leerling bijvoorbeeld eerst kan gokken dat er 10 grote en 14 kleine vrachtwagens waren, maar dan vaststelt dat er dan slechts 540 kasten zouden geweest zijn (in plaats van 632). Een nieuwe gok van 13 grote en 17 kleine vrachtwagens leidt tot 678 kasten, waarna de gok van 12 grote en 16 kleine vrachtwagens wel tot de juiste oplossing leidt.

Een tweede verschilpunt betreft de aard van de operaties die tot de oplossing leiden. Bij rekenkundige oplossingen wordt altijd vertrokken van getallen die gekend zijn, en waarbij een ander gekend getal opgeteld, afgetrokken, … wordt, om zo nieuwe getallen te verkrijgen. Bij een algebraïsche oplossing is net kenmerkend dat operaties worden uitgevoerd op een getal dat (nog) niet bekend is.

Een derde verschilpunt is de band die de oplosser tijdens het proces behoudt met de oorspronkelijke probleemcontext. Kenmerkend aan rekenkundige redeneringen is dat de oplossingsweg haar betekenis ontleent aan de context van het oorspronkelijke probleem. De oplosser kan ten allen tijde achterhalen wat hij aan het berekenen is en wat de betekenis van elke stap is. Bij een algebraïsche oplossingswijze is de betekenis van de operaties weg zodra de vergelijking is opgesteld, en pas wanneer de waarde van de onbekende is achterhaald wordt teruggekeerd naar het oorspronkelijke probleem.

Doordat leerlingen doorheen het basisonderwijs zeer goed vertrouwd raken met rekenkundige oplossingswijzen is de overgang naar algebra verre van vanzelfsprekend. We illustreren een aantal moeilijkheden die leerlingen ondervinden (voor een uitgebreid overzicht, zie Kieran, 1992).

Een eerste moeilijkheid die leerlingen ontmoeten is de spanning tussen procedurele gewoonten en het nemen van een globaal (of structureel) perspectief. Een algebraïsche vergelijking moet door leerlingen bekeken worden als een wiskundig object op zich, en niet iets dat (zoals ze gewend zijn) “dient om uitgerekend te worden”. Jonge kinderen kunnen wel goed vergelijkingen zoals 6x + 8 = 32 oplossen door de inverse operaties uit te voeren in de omgekeerde volgorde (32 – 8 = 24 : 6 = 4), maar dan gaan ze rekenkundig tewerk. Wanneer de onbekende meer dan eenmaal voorkomt, en zeker wanneer die aan beide zijden van het = teken voorkomt, dan komen ze met deze aanpak in de problemen, zoals bij de vergelijking 50 – 2x = 3x -25 .

Een tweede moeilijkheid is dat leerlingen aanvankelijk een andere betekenis geven aan het = teken. In de lagere school wordt het = teken doorgaans gebruikt als een teken dat aankondigt waar het “resultaat” staat, en niet om een symmetrische relatie aan te duiden. Leerlingen zien het teken als een signaal om “iets te doen”. Zo hebben leerlingen er doorgaans ook geen probleem mee om uitdrukkingen te schrijven als 2,30 + 3,30 = 5,50 – 1,50 = 4,00. Tegelijk aanvaarden ze uitdrukkingen als 4 + 3 = 6 + 1 of 3 = 3 dan weer niet als geldig.

Een derde moeilijkheid waarop leerlingen stoten is het typische symboolgebruik in de algebra. In paragraaf 2.3. wezen we al op een groot aantal moeilijkheden die leerlingen hebben met het interpreteren van letters als onbekenden of variabelen op zich. We haalden ook al aan dat de oorspronkelijke betekenis van een probleem verloren gaat bij algebraïsche manipulaties. Soms proberen leerlingen dan bij het manipuleren van een algebraïsche uitdrukking terug te vallen op voor hen gekende realistische modellen. Wanneer ze bijvoorbeeld de uitdrukking 6x – 10 = 10x – 22 zien, dan grijpen ze terug naar een “balans” model, en kunnen ze aan beide zijden 6x wegnemen. De beperking waarop ze dan botsen is evenwel dat de termen -10 en -22 weinig betekenis hebben in een dergelijk balansmodel, omdat gewichten op een balans positief zijn. Onderzoek wijst uit dat leerlingen vaak in de problemen komen wanneer negatieve getallen voorkomen bij het oplossen van een vergelijking, ook al hanteerden ze eerder wel de correcte procedures voor het oplossen van eenzelfde vergelijking waarbij uitsluitend positieve getallen voorkwamen.

4.3.3.2 (Pre)algebraïsch redeneren

In de vorige paragraaf hebben we het verschil tussen een rekenkundige en algebraïsche denkwijze als een kloof beschreven, en hebben we aangegeven hoeveel moeilijkheden leerlingen ondervinden om zich de algebraïsche denkwijze en oplossingsstrategieën eigen te maken. Toch wordt sinds de laatste 10 jaar meer en meer erkend dat leerlingen op veel jongere leeftijd dan doorgaans wordt aangenomen in staat zijn om bepaalde aspecten van het algebraïsch redeneren succesvol uit te voeren. Heel wat wiskundedidactici (bijv. Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2001) houden dan ook een pleidooi om vroeger in het curriculum te starten met (pre)algebra, om zo de overgang te verzachten en een eventuele kloof te dichten.

De wiskundedidactici die pleiten voor een vroege start van het algebracurriculum beargumenteren die keuze door te stellen dat rekenkundige procedures telkens een algebraïsche betekenis hebben waarop de aandacht kan worden gevestigd. Zo kan de uitdrukking “+3” verwijzen naar een operatie die wordt uitgevoerd op een specifiek getal, maar ook op een relatie tussen een *verzameling* van inputwaarden en een *verzameling* van outputwaarden, die kan worden uitgedrukt als een functie “n → n+3”. En ook bij het oplossen van vraagstukken op een rekenkundige manier (zie boven) worden in feite vaak al operaties uitgevoerd met onbekende grootheden. We zien dit niet altijd duidelijk omdat in de som die leerlingen uiteindelijk neerschrijven de onbekende waarde doorgaans achter het = teken staat, maar heel vaak gaat aan de uiteindelijk neergeschreven som een redeneerproces vooraf waarin wel met een onbekend getal wordt gerekend. Neem een vraagstuk als “Aisha had 25 euro in haar spaarpot. Ze heeft deze week 12 euro bij gekregen en ook geld uitgegeven aan twee even dure CD’s, zodat er nu 13 euro in haar spaarpot zit. Hoeveel kostte één CD?” De meest directe weergave van dit vraagstuk is 25 + 12 – 2x = 13. Om deze vergelijking vervolgens op te lossen moet algebraïsch geredeneerd worden. We kunnen 13 overbrengen naar de linkerkant en -2x naar de rechterkant, zodat we krijgen: 37 – 13 = 2x, waaruit volgt dat x = 12. Maar leerlingen in de bovenbouw van het basisonderwijs zullen op basis van het vraagstuk eerder gaan beredeneren dat Aisha over 25 + 12 = 37 euro beschikte en 13 euro over houdt, dus heeft ze 24 euro uitgegeven, en dit aan twee CD’s, of dus 12 euro per CD. De oorspronkelijke vergelijking wordt dus niet eerst expliciet uitgeschreven en vervolgens doorberedeneerd, maar in gedachten al vertaald naar een hanteerbare vorm waarbij de onbekende berekend kan worden.

Laten we ook even terugkeren naar de mogelijke algebraïsche en rekenkundige oplossingswijzen voor het vraagstuk vermeld in de inleiding van paragraaf 3. Hierboven hebben we beklemtoond hoe verschillend de algebraïsche en rekenkundige oplossingswijzen wel waren, maar er zijn ook bepaalde gelijkenissen te vinden die de aanleiding kunnen zijn om de brug tussen beide te slaan. Een leerling die redeneert dat er in de 4 kleine vrachtwagens 20 kasten passen, en deze kasten dus alvast uit het totaal van 632 kasten haalt, waarna er evenveel grote als kleine vrachtwagens zijn, omzeilt niet alleen op een erg slimme manier de nood om een vergelijking op te stellen en deze uit te werken; de denkstappen die deze leerling zet kunnen relatief makkelijk herkend worden in de verschillende stappen die gezet worden om de vergelijking 26x + 20 (x+4) = 632 op te lossen. Na uitwerking van de haakjes bekomen we dan immers 46x + 80 = 632. Aan beide zijden van het = teken kunnen de 80 kasten dan worden weggehaald en we krijgen 46x = 552. Ook een leerling die probeert de oplossing te vinden via verstandig uitproberen (een gok doen voor het aantal grote vrachtwagens, en vervolgens alles doorrekenen om te zien of hij zo op 632 uitkomt) doet in feite iets dat in de richting van algebra gaat: hij kiest een waarde voor x, en werkt dan doorheen de hele vergelijking: (26x10) + 20x(10+4) = …. Wanneer de leerling deze stappen enkele keren herhaalt vooraleer hij aan het juiste totaal komt, dan heeft hij een aantal keer de wiskundige structuur gebruikt zoals die wordt uitgedrukt in de algebraïsche vergelijking, alleen is de leerling er zich wellicht niet ten volle van bewust.

Tamelijk complexe algebraïsche vraagstukken kunnen dus door leerlingen via handige rekenkundige strategieën worden opgelost, terwijl in die rekenkundige strategieën toch een duidelijke aanzet tot algebraïsch redeneren kan worden herkend. Het hoeft dan ook niet te verbazen dat in het peilingsonderzoek in de eerste graad secundair onderwijs de leerlingen wel behoorlijk goed scoorden in het gebied van algebraïsering (omdat ze in staat zijn om de relaties in probleemsituaties te beredeneren), maar dat ze veel slechter scoren in het gebied veeltermen, waar abstracte algebraïsche uitdrukkingen moeten worden gemanipuleerd volgens formele – en voor de leerlingen wellicht weinig betekenisvolle - regels.

Wanneer we de algebraïsche redeneervaardigheden van leerlingen in het basisonderwijs willen stimuleren, dan zal het er wellicht in eerste instantie op aan komen om explicieter te onderkennen wat er nu al aan nuttige activiteiten plaatsvindt. Een tweede stap kan zijn om nu en dan de handige strategieën die leerlingen in het basisonderwijs nu al verwerven ook formeler te gaan noteren, bijvoorbeeld met gebruikmaking van letters. De redeneringen die leerlingen nu reeds kunnen maken kunnen dan eveneens worden ontdekt in de formelere uitdrukkingen, waardoor ze betekenis krijgen. Hierbij kunnen nieuwe technologieën worden ingezet zoals symbolische en grafische rekenmachines, of eenvoudigweg spreadsheetprogramma's op de computer. De introductie van deze leermiddelen in het basisonderwijs bieden een aantal interessante mogelijkheden. Zo kunnen wiskundige problemen vanuit verschillende invalshoeken tegelijk benaderd worden: via tabellen, grafieken, en eenvoudige uitdrukkingen met letters. Binnen een spreadsheetomgeving kunnen leerlingen de vaardigheden verwerven om grootheden door middel van andere grootheden uit te drukken, hetgeen een aanzet is tot het opstellen van vergelijkingen. Ook kunnen zij binnen zo'n omgeving makkelijk een aantal mogelijke oplossingen voor een vraagstuk "uitproberen" alvorens een algebraïsche vergelijking op te stellen. Tenslotte kan aan de hand van tabellen en grafieken worden geëxploreerd hoe de hoeveelheden in een probleemcontext zich gedragen als één van de andere grootheden varieert.

4.3.3.3 Onderzoek bij Vlaamse leerkrachten

Zoals hierboven geargumenteerd wordt, zou de kloof die vaak wordt vastgesteld tussen rekenen en algebra kunnen gedicht worden door vroeger te starten met het introduceren van algebra, en meerbepaald door de rekenkundige denkwijzen van leerlingen betekenis te geven vanuit algebra. Een belangrijke voorwaarde die daarvoor vervuld moet zijn – naast de beschikbaarheid van gepast didactisch materiaal – is uiteraard dat de leerkrachten in staat zijn om deze ontwikkeling bij leerlingen te begeleiden en ondersteunen.

Onderzoek dat we zelf een tiental jaar geleden uitvoerden bij toekomstige leerkrachten in het basisonderwijs en toekomstige leerkrachten in de eerste graad van het secundair onderwijs (Van Dooren et al., 2001) plaatst daar echter ernstige vraagtekens bij.

In ons onderzoek hebben we vastgesteld dat een aanzienlijk aantal toekomstige leerkrachten basisonderwijs (in het laatste jaar van hun opleiding) duidelijk moeilijkheden ondervindt met het begrijpen en uitvoeren van algebraïsche oplossingstechnieken, en dat ze niet alleen voor eenvoudige maar ook voor moeilijkere vraagstukken noodgedwongen teruggrijpen naar rekenkundige technieken, ook al zijn deze soms omslachtig en kunnen ze tot fouten leiden. Kunnen en zullen deze leerkrachten de leerlingen stimuleren om zelf (voorlopers van) de nieuwe algebraïsche werkwijze te ontdekken, en hoe zullen zij reageren als sommige leerlingen deze technieken beginnen te hanteren, maar bijsturing nodig hebben?

We stelden ook vast dat veel toekomstige wiskundeleerkrachten voor de eerste graad van het secundair onderwijs voor vrijwel alle vraagstukken onmiddellijk een algebraïsche oplossingswijze hanteren, ondanks het feit dat sommige vraagstukken gemakkelijk en snel via enkele simpele rekenkundige bewerkingen kunnen worden opgelost. We zagen ook dat ze bij het evalueren van oplossingen van leerlingen een zeer uitgesproken voorkeur hebben voor een algebraïsche aanpak, ook al is een rekenkundige aanpak soms veel eenvoudiger. Hoe gaan deze leerkrachten om met de instroom van leerlingen uit de basisschool die een sterk rekenkundige achtergrond hebben? Zijn ze voldoende in staat om in te spelen op de rekenkundige concepten, gewoonten, en strategieën van deze leerlingen, en kunnen ze de pertinentie en validiteit van een algebraïsche aanpak aantonen?

4.3.4 Conclusies

In deze tekst hebben we aangetoond hoe er een fundamentele kloof kan bestaan tussen de wiskunde zoals deze aan bod komt in het basisonderwijs en in het secundair onderwijs, en hoe deze kloof een verklaring zou kunnen bieden voor de uitval die heel wat leerlingen hebben vertoond in de wiskundepeiling in de eerste graad van het secundair onderwijs. We hebben deze kloof geïllustreerd met twee voorbeelden: wanneer leerlingen kennis maken met rationale getallen speelt hun voorkennis over natuurlijke getallen nog lang een belangrijke rol, en wanneer ze een algebraïsche redeneerwijze moeten verwerven, dan moeten ze tal van conceptuele moeilijkheden overwinnen. De moeilijkheden die in het peilingsonderzoek worden vastgesteld sluiten dan ook nauw aan bij bevindingen in internationaal onderzoek.

Wat belangrijk is, is de vaststelling dat de vastgestelde kloof geen onoverkomelijk probleem zou moeten vormen. Voor de twee voorbeelden die we hebben besproken hebben we het belang van een langetermijnperspectief toegelicht. Wanneer we een goed inzicht hebben in de moeilijkheden die leerlingen ervaren in de aanvangsjaren van het secundair onderwijs kunnen we hier in het basisonderwijs al op anticiperen. We kunnen al anticiperen op de toekomstige betekenisuitbreiding van het begrip “getal”, en we kunnen de rekenkundige activiteiten die leerlingen stellen betekenis geven vanuit algebra.

De specifieke moeilijkheden die leerlingen ondervinden in diverse deelgebieden van de wiskunde hebben te maken met een verschil in betekenisgeving in het basis- en secundair onderwijs. Omdat bovendien de eindtermen voor alle leerlingen in de eerste graad van de A-stroom nog steeds dezelfde zijn, kan de vraag gesteld worden of de overgang van het ene naar het andere onderwijsniveau wel op de leeftijd van 12 jaar moet plaatsvinden. Er kan ook gedacht worden aan een tussenniveau voor leerlingen van 10 tot 14 jaar, waardoor de overgangen wat geleidelijker kunnen plaatsvinden.

Los van een eventuele hervorming van het onderwijssysteem willen we in ieder geval suggereren om in de opleiding van leraren basis- én secundair onderwijs wat vaker over het muurtje te gaan kijken. Er zou explicieter aandacht kunnen besteed worden aan de overgang van het basis- naar secundair onderwijs, aan de verschillende vakinhoudelijke leerlijnen die doorlopen over de onderwijsniveaus heen, en aan de moeilijkheden die leerlingen daarbij ondervinden. Het zou in dat verband zinvol kunnen zijn om toekomstige leraren basis- en secundair onderwijs wat vaker met mekaar te confronteren doorheen hun opleiding, en bepaalde vakinhoudelijke en vakdidactische modules samen te laten volgen.

4.3.5 Bronnen

Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Christou, K.P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students's interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 283-297). Amsterdam: Elsevier.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Merino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(16),3-17.

Graeber, A. O., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 95–102.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Mc. Millan.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 38-65.

Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M-P. (2009). Rational numbers: Componential versus holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62, 1598 –1616.

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*, 205–225.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many *decimals* are there between two *fractions*? Aspects of secondary school students' understanding about rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L. & Van Dooren, W. (in press). What fills the gap between the discrete and the dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction.*

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2001). *Rekenen of algebra? Gebruik van en houding tegenover rekenkundige en algebraïsche oplossingswijzen bij toekomstige leerkrachten* (Studia Paedagogica No. 30). Leuven: Universitaire Pers.

4.4 Leerlingen gebruiken letters… met betekenis. Michel Roelens, redactie Uitwiskeling

De peilingresultaten tonen aan dat onze 14-jarige leerlingen het moeilijk hebben om met veeltermen te rekenen, om formules op te stellen en om vergelijkingen op te lossen. Het leren rekenen met en gebruiken van letters is een proces dat in de wiskundelessen van de eerste graad in gang is gezet en blijkbaar op het einde van de eerste graad nog verre van 'af' is, zeker niet in de 'technische opties'…

Wellicht is er geen uniek recept om hieraan te verhelpen. (Nog) meer oefenen? Eerder inzetten op het opbouwen van blijvende kennis, dan op het 'studeren voor de toets van morgen'? Meer differentiëren?

In enkele recente lezingen en teksten (Roelens, 2008; Roelens en Willems, 2008) hebben wij benadrukt dat het vatten van de *betekenis* van letters in formules en vergelijkingen voor leerlingen niet vanzelfsprekend is. Volgens ons moet er in de klas niet enkel aandacht gaan naar het kennen van rekenregels en het inoefenen van oplossingsmethodes en rekentechnieken, maar zeker ook naar het construeren van de betekenis van variabelen en onbekenden.

We willen hier twee manieren voorstellen om met leerlingen aan de betekenis van variabelen en onbekenden te werken. In deel 1 (toveren met letters) werken we het verklaren van kleine rekenkundige ‘goocheltrucs’ uit en in deel 2 (algebralessen met applets) illustreren we het gebruik van enkele ‘applets’ die ontworpen zijn om variabelen en onbekenden betekenis te geven.

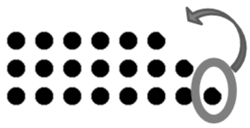
4.4.1 Toveren met letters

Natuurlijke getallen vormen voor leerlingen van de onderbouw een ideaal domein om allerlei ontdekkingen te maken en de gevonden patronen te verklaren. De verklaringen zijn niet te moeilijk en kunnen op verschillende manieren gebeuren: op generieke voorbeelden, visueel, algebraïsch… Veel van deze opgaven zijn in te kleden als ‘goocheltrucs’ waarbij de leraar ‘telepathisch’ kan raden welk getal een leerling in gedachten had genomen. Leerlingen willen dan natuurlijk graag weten waarom het werkt…

We geven enkele voorbeelden.

- Neem een natuurlijk getal (niet 0). Tel er zijn voorganger en zijn opvolger bij. Doe dit nog eens voor twee andere natuurlijke getallen. Wat stel je vast? Kun je dit veralgemenen?

  Iemand die bv. 7 in gedachten nam, vindt: 6 + 7 + 8 = 21. Wie 12 nam, vindt: 11 + 12 + 13 = 36. Je komt altijd een drievoud uit, namelijk drie keer het gekozen getal. Dit kan met algebra bewezen worden: $(n – 1) + n + (n + 1) = 3n$. Maar een visuele verklaring geeft vaak nog meer het gevoel dat je ‘ziet’ waarom het klopt: door één stip te verplaatsen, krijg je een rechthoek van drie bij het gekozen aantal.

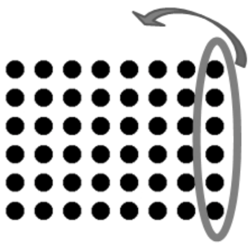
  

  De leerlingen kunnen het niet zomaar veralgemenen tot een som van vier opeenvolgende natuurlijke getallen: 6 + 7 + 8 + 9 is geen viervoud. Voor vijf opeenvolgende getallen (of algemener voor een oneven aantal opeenvolgende getallen) klopt het weer wel…

- Neem een natuurlijk getal (niet 0). Vermenigvuldig zijn voorganger met zijn opvolger en tel er 1 bij op. Wat stel je vast?

  Of de goochelversie: Neem een natuurlijk getal in gedachten (groter dan 3). Vermenigvuldig zijn voorganger met zijn opvolger en tel er 1 bij op. Hoeveel cijfers heeft je resultaat? Wat is het laatste cijfer? Nu zal ik zeggen wat je getal was.

  Wie 7 neemt, krijgt $6 \cdot 8 + 1 = 49$. Wie 12 neemt, krijgt $11 \cdot 13 + 1 = 144$. Iedereen krijgt het kwadraat van het gekozen getal. Ook weer niet moeilijk om algebraïsch te verifiëren: $(n – 1)(n + 1) + 1 = n^2 – 1 + 1 = n^2$. Of visueel: je kunt van de rechthoek van 6 bij 8 ‘net geen’ vierkant van 7 bij 7 maken; hiervoor ontbreekt één stip. Maar je moest er één bijtellen, dus klopt het.

- Stel $n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot … \cdot 9$. Toon aan dat $n + 2$, $n + 3$, … , $n + 9$ zeker geen priemgetallen zijn. Als je dit veralgemeent, wat betekent dit voor de verdeling van de priemgetallen?

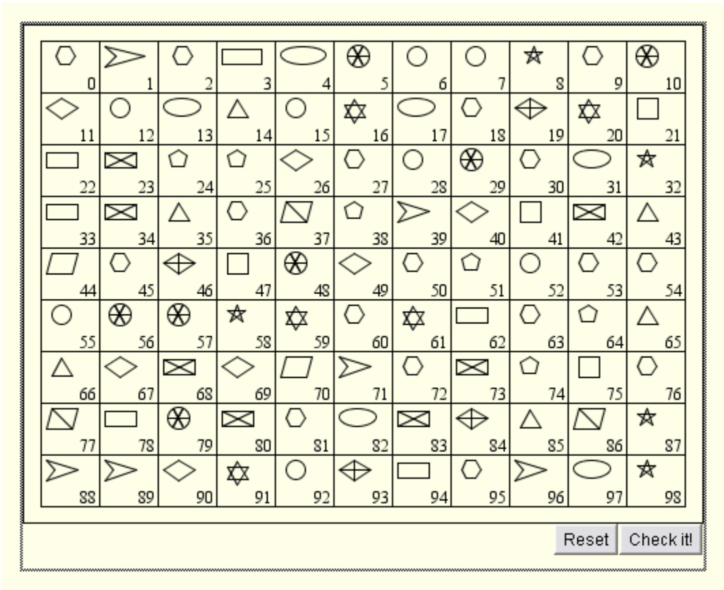
Of de meer uitdagende versie: Een *priemwoestijn* is een rijtje van opeenvolgende getallen waar geen enkel priemgetal bij is. Bedenk een priemwoestijn van lengte 5. Bestaat er ook een priemwoestijn van lengte 100?

n + 2 is een 2-voud, n + 3 is een 3-voud, … n + 9 is een 9-voud.

Een priemwoestijn van lengte 5 kun je vinden door even te proberen: 24, 25, 26, 27, 28. Met het procedé $n + 2$, $n + 3$, … (zie hoger) kunnen we echter een priemwoestijn maken van willekeurige lengte. Voor lengte 100 nemen we $n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 101$ en gaan we tot $n + 101$.

Met deze vrij eenvoudige opgave komen we in een domein van de wiskunde waar nog veel onderzoek over gedaan wordt en waar nog veel onopgeloste problemen over bestaan: de verdeling van de priemgetallen over de natuurlijke getallen.

- Op www.cut-the-knot.org/Curriculum/Magic/MindReaderNine.shtml staat een goocheltruc die leerlingen van de onderbouw kunnen verklaren. Neem een getal van twee cijfers in gedachten. Trek van dit getal de som van zijn cijfers af. Het resultaat zoek je op in de tabel hieronder.



Dan kan de goochelaar (of de applet) raden welke tekening bij je resultaat staat: een regelmatige zeshoek. Op de site kun je opnieuw proberen en wisselen de tekeningen.

Als je goed naar de tabel kijkt, staat er (onder andere) bij alle negenvouden een zeshoekje. Het resultaat is altijd een negenvoud: $10a + b - (a + b) = 9a$. Omdat de tabel rijen van lengte 11 heeft, valt het minder op dat alle negenvouden dezelfde tekening hebben (op een tabel van lengte 10 liggen de negenvouden op herkenbare diagonalen…).

- Elke leerling neemt een getal tussen 1 en 25 in gedachten (of je neemt gewoon de rangnummers van de leerlingen). Alle veelvouden van 1 staan op (wie blijft zitten, heeft het dus niet begrepen of is nog niet wakker). Dan gaan alle veelvouden van 2 zitten. Dan wisselen alle veelvouden van 3 (wie zat, staat op; wie stond, gaat zitten). Dan wisselen alle veelvouden van 4. Enzovoort, tot en met de veelvouden van 25. Op het einde staan enkel de kwadraten recht (en leerlingen die een rekenfout maakten).

Enkel de kwadraten hebben een oneven aantal delers. De delers van een niet-kwadraat, bv. 18, komen in paren voor: 1 en 18; 2 en 9; 3 en 6. Bij een kwadraat is één deler aan zichzelf gekoppeld, bv. 36: 1 en 36; 2 en 18; 3 en 12; 4 en 9; 6 en 6 zelf.

4.4.2 Algebralessen met applets

4.4.2.1 Inleiding

a) Algebra in het computertijdperk

Over algebra hoor je wel eens extreme meningen. Volgens de enen moet er in de wiskundeles vooral geoefend worden in het rekenen met formules en in het toepassen van vaste algoritmen, want deze algebraïsche vaardigheden gaan achteruit. Volgens anderen hoeven leerlingen (bijna) geen algebraïsche berekeningen met pen en papier meer te leren maken, want dit kan worden overgelaten aan computers en symbolische rekenmachines (zoals dit intussen voor een groot stuk het geval is met het numerieke rekenwerk).

De realiteit is veel genuanceerder. Ook als technologie wordt ingeschakeld, moeten leerlingen goed weten wat er gebeurt om te kunnen bijsturen en interpreteren. Algebraïsche vaardigheden en zeker 'symbol sense' mogen we niet verwaarlozen. Symbol sense is het inzicht in algebraïsche uitdrukkingen: termen en factoren herkennen, 'zien' dat er kan worden vereenvoudigd, een stuk van de formule als één geheel kunnen bekijken… Zonder symbol sense weten leerlingen niet wat ze aan de computer moeten vragen en wat ze met het resultaat kunnen aanvangen. Zowel om zelfredzaam te zijn zonder computer als om de computer efficiënt te kunnen gebruiken, blijft vaardigheid en inzicht in algebraïsch rekenen dus belangrijk.

Anderzijds is algebra veel meer dan 'rekenwerk', dan het toepassen van vaste algoritmen. Van bij de Babylonische en Arabische oorsprong van de algebra ging het niet enkel over het berekenen van oplossingen maar werd alles meetkundig geïnterpreteerd: een tweedegraadsvergelijking was een vraagstuk over oppervlakten en lengten. Algebra is ook: het herkennen van patronen en die patronen kunnen beschrijven met formules, inzicht in de betekenis van constanten, variabelen, onbekenden, parameters… Het zijn letters die getallen voorstellen, maar telkens spelen die letters een andere rol in het algebraïsche verhaal. Verderop, in de derde graad, stellen de letters ook matrices, veeltermen, functies… voor en nog later, in het hoger onderwijs, elementen van abstracte algebraïsche structuren.

b) Welke rol kunnen applets spelen in de wiskundeles?

Deze loep gaat over algebra. Om het inzicht en de 'symbol sense' bij de leerlingen te verhogen, helpt het niet om nog meer te oefenen in het toepassen van standaardalgoritmen (ook al is een dosis oefening natuurlijk noodzakelijk). Er moet ook gewerkt worden aan de *betekenis* van variabelen, vergelijkingen… Hiertoe schakelen we, waar het nuttig is, een aantal *applets* in. Een applet is een klein programma, meestal in Java, dat op het internet beschikbaar is en waar je onmiddellijk mee aan de slag kunt. De meeste applets waar we naar verwijzen, zijn ontwikkeld door het Freudenthal Instituut for science and mathematics education (FIsme), Utrecht, en zijn beschikbaar op www.wisweb.nl. Er zijn ook applets voor meetkunde, analyse, statistiek… maar we beperken ons in deze loep tot algebra.

Er zijn drie soorten applets die in algebralessen kunnen worden gebruikt:

- applets om ideeën of technieken aan te brengen (via een context, via snelle visualisering)
- applets die routinetaken of berekeningen overnemen
- applets om rekentechnieken in te oefenen.

In deze loep ligt de nadruk op de eerste soort. We gebruiken ze bij de aanbreng van nieuwe leerstof. We gaan er niet van uit dat de leerstof vooraf zonder applets is gegeven. Wel is het zo dat de leerkracht niet alle lessen met behulp van een computer geeft. Deze loep zoomt in op het gebruik van applets, maar lessen aan de computer worden natuurlijk afgewisseld met lessen met pen, papier, bord en krijt…

De applets brengen afwisseling en dat kan de motivatie van de leerlingen verhogen. Bovendien geeft het vaak een andere kijk op de algebraïsche leerstof, een snelle visualisering of een soort 'tweede manier' om inzicht te verwerven. Sommige applets, bv. bij het oplossen van vergelijkingen, doen een deel van het rekenwerk in de plaats van de leerling, zodat die zich (in die fase) volledig kan concentreren op de oplossingsstrategie zonder het risico op rekenfouten.

Wie sommige van deze applets in de klas uitprobeert, zal snel merken dat de leraar niet overbodig wordt.

4.4.2.2 Variabelen en formules

a) Letters voor getallen

Het werken met letters wordt in de lagere school voorbereid door te werken met ‘puntsommen’. Een voorbeeld van een puntsom is een opgave van de vorm $84+.=90$. Leerlingen zoeken hierbij de waarde die ze op het puntje moeten invullen om de som te laten kloppen. In Nederlandse handboeken kunnen we de vorige opgave terugvinden als een ‘handsom’: 84+✋=90. Verder worden er ook *toveropgaven* aangeboden: oefeningen waarbij je altijd een ware uitspraak krijgt, welke waarde je ook invult voor het handje. Een voorbeeld van zo’n toveropgave is $5\cdot$✋$+3\cdot$✋$=8\cdot$✋. Meer hierover vind je in UW 14/4 van oktober 1998.

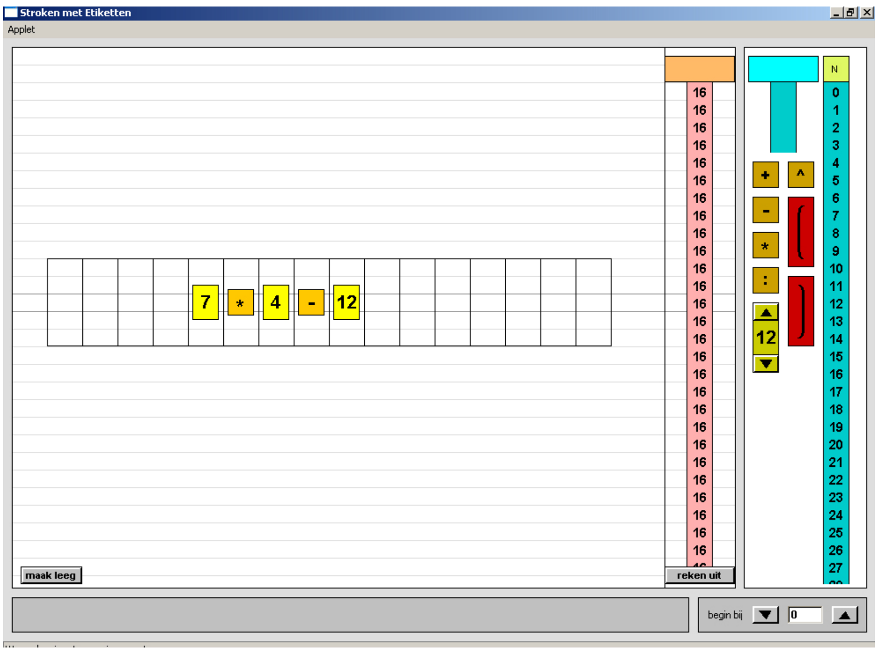
In het eerste jaar van het secundair onderwijs worden letters voor het eerst gebruikt om getallen voor te stellen. In eerste instantie kunnen het punt uit de puntsom en het handje uit de handsom voorgesteld worden door het woord *getal.* Daarna wordt dit verkort tot een *letter*, waarbij de letter *g* het meest aangewezen is om duidelijk te maken dat het om een *getal* gaat*.* Op die manier worden letters ingevoerd. Bij de eerste handsom is de letter een *onbekende*: we zoeken één (of enkele) getal(len) waarvoor de uitkomst klopt. Bij de tweede handsom staat de letter voor een *variabele*: ze kan immers om het even welke waarde aannemen. Dit is een voorbereiding op *rekenregels*. Ook bij functies worden letters gebruikt om variabelen aan te duiden. Daar is het nog wat anders. De *x* stelt een willekeurig getal voor, maar de *y* is toch niet zo willekeurig. De *x* is dan een *onafhankelijke veranderlijke* en de *y* een *afhankelijke veranderlijke*.

Leerlingen moeten dus oefeningen maken waarbij letters getallen voorstellen, zodat ze hier voldoende vertrouwd mee worden, want eigenlijk is dit inzicht niet eenvoudig. Hierbij kun je ook gebruik maken van applets. We geven een voorbeeld waarbij de idee dat een letter dient om te veralgemenen, mooi tot uiting komt. Daarom kan dit applet al gebruikt worden bij een eerste kennismaking met letters. Aan de hand van na te maken oefeningen laten we leerlingen eerst kennismaken met dit programmaatje, vooraleer we ze zelf aan de slag laten gaan.

Rekenen met stroken

Surf naar www.wisweb.nl. Klik op het rode woord applet. Klik dan op OK. Open het applet *‘stroken met etiketten’*. Klik op de gele rechthoek met de boodschap ‘*start stroken met etiketten’*. Je scherm is dan opgedeeld in drie delen.

1) Door invoermogelijkheden naar het werkblad te slepen, kun je bewerkingen maken. Zo kun je bijvoorbeeld $7\cdot 4-12$ vormen in het werkblad. Verander hierbij de waarden van de getallen die je invoert, door op de pijltjes te klikken. Met de opdracht ‘*reken uit’* geeft het applet de uitkomst in de roze kolom. Doe dit.



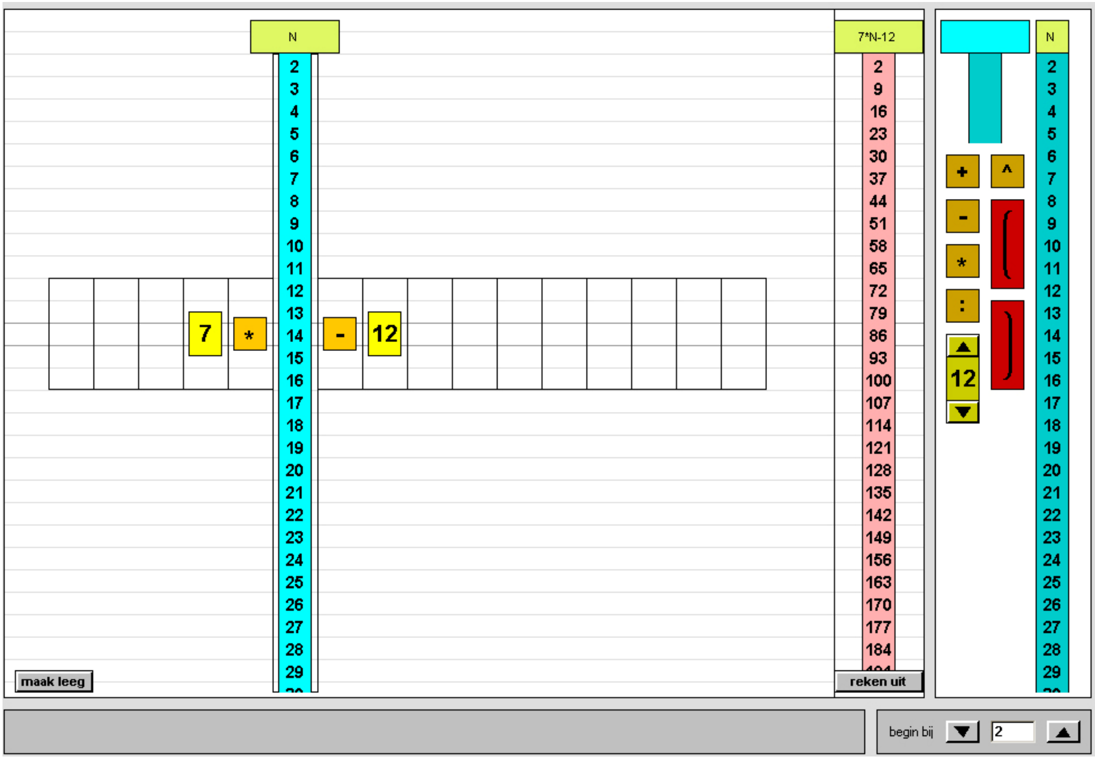
Wellicht vind je het eigenaardig dat de uitkomst meerdere keren weergegeven wordt. Dat komt omdat het applet in feite gemaakt is om heel veel bewerkingen ineens uit te rekenen. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de blauwe strook. We willen bijvoorbeeld (in één keer) de uitkomsten van de volgende opgaven vinden: $7 \cdot 2 - 12$; $7 \cdot 3 - 12$; $7 \cdot 4 - 12$; $7 \cdot 5 - 12$ ...

2) Kies in het beginscherm voor ‘begin bij 2’ en vervang in het werkblad de factor 4 door de groene strook. Als je vervolgens op ‘reken uit’ klikt, krijg je de resultaten.

Boven de blauwe invoerstrook zie je de letter *N* staan. Naargelang *N* een andere waarde aanneemt in de blauwe invoerstrook, krijg je een andere uitkomst in de roze uitvoerstrook. Het getal op de eerste, tweede, derde... plaats in de roze strook komt overeen met 7 maal het eerste, tweede, derde... getal uit de strook *N* min 12. Daarom geven we de roze strook het *etiket* $7N - 12$. Je kunt dit etiket in de oranje rechthoek boven de uitkomstenstrook invullen.

3) Doe dit.

Wil je nu het 10-de getal uit de roze kolom kennen, dan vervang je de letter *N* uit het etiket door het 10-de getal uit de groene strook. Als je de bewerkingstekens gebruikt die bij deze applet horen (* voor een vermenigvuldiging, ^ voor machten, / voor een deling) kun je op die manier controleren of je etiket klopt. Bij een fout etiket krijg je de boodschap ‘dit etiket klopt niet’ op een gele achtergrond, bij een juist antwoord kleurt het etiket zelf lichtgroen.



Nu kun je zelf aan de slag! Je zal in de onderstaande oefeningen het woord *formule* tegenkomen. Dit is een synoniem voor het woord etiket.

4) Gebruik dit applet om de volgende opgaven ineens uit te rekenen:
$4-(-2+3)+1$; $4-(-1+3)+1$; $4-3+1$; $4-(1+3)+1$; ...

5) Zoek de formule die past bij vorige opgave. Controleer met het applet of je antwoord klopt.

6) Gegeven is de formule $9-(3+n)$. Onderzoek, met pen en papier, welke waarden je voor deze formule vindt als $n = 10$ en als $n = -5$.

7) Voor welke natuurlijke getallen is $9-(3+n)$ positief? En voor welke getallen negatief? Onderzoek dit zonder het applet.

8) Controleer je antwoorden op vraag 6 en 7 met het applet

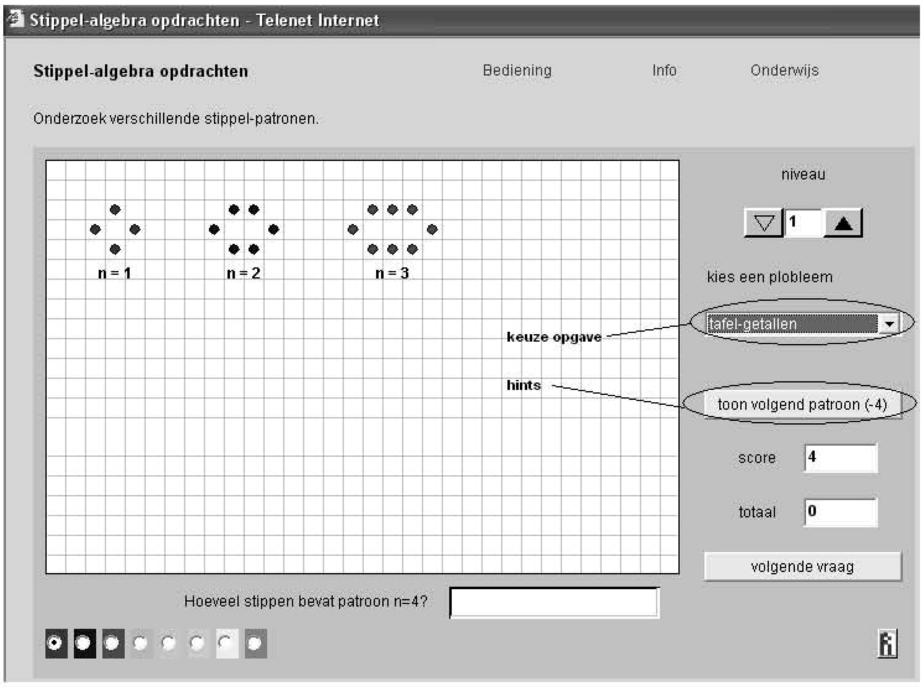
b) Formules bij patronen

De betekenis van letters kan in de beginfase van algebra ook duidelijk gemaakt worden door formules te zoeken bij patronen. In UW 11/4 van oktober 1995 gaven we mooie voorbeelden van meetkundige voorstellingen waarbij leerlingen formules kunnen zoeken bij patronen. Het applet *stippelalgebra* kan je beschouwen als een elektronische variant hiervan. Bij elke opgave zijn een aantal meetkundige figuren gegeven, waarvan het aantal stippen een patroon vormt. De vragen die leerlingen hierbij moeten beantwoorden, zijn geordend volgens stijgende moeilijkheidsgraad. Het einddoel van de vragenreeks is het vinden van een passende formule.

Formules met stippen

Surf naar www.wisweb.nl. Klik op het rode woord applet. Klik dan op OK. Open het applet *'Stippelalgebra opdrachten'*.

1) Kies voor een opgave van niveau 1 over tafelgetallen. Op de afdruk hieronder zie je hoe dat kan. Beantwoord de vraag die op het scherm staat. Je krijgt een beoordeling van je antwoord door op *enter* te klikken. Ga telkens verder met de volgende vraag, en probeer uiteindelijk deze reeks patronen in een formule (*expressie*) te omschrijven.



2) Maak op dezelfde manier een aantal opgaven naar keuze van dit applet. Houd rekening met de volgende afspraken:

- je begint met oefeningen van niveau 1
- per moeilijkheidsgraad (niveau) doorloop je alle opgaven van minstens drie stippel-patronen.
- pas als je binnen één moeilijkheidsgraad alle opgaven van drie stippelpatronen foutloos hebt opgelost, ga je over naar een volgende moeilijkheidsgraad.

Bovenstaande applets helpen de leerlingen inzicht te krijgen in het gebruik van een letter voor een willekeurig getal. In de volgende paragraaf gaan we een stapje verder.

c) Formules meetkundig illustreren en ontdekken

In algebra maken we gebruik van heel wat eigenschappen om handig te rekenen. Deze eigenschappen worden vaak verkort uitgedrukt in een formule. In de meeste handboeken van het secundair onderwijs worden die formules afgeleid door te rekenen. Het letterrekenen is dan eerder gericht op het leren van formele, abstracte regels (vb. $a \cdot (b+c) = ab + ac$), eventueel ondersteund met rekenschema's (vb. de papegaaienbek: $a \cdot (b+c) = ab + ac$). Eens de regel afgeleid is, ligt de nadruk vooral op *hoe* iets moet uitgevoerd worden, minder op *waarom* de regel geldt en waarom hij nuttig is. Soms wordt er ook een meetkundige interpretatie gegeven als illustratie. Het lijkt ons een goed idee om beide mogelijkheden aan te bieden: de ene leerling is immers meer geholpen door een afleiding, terwijl de andere eerder een visuele voorstelling nodig heeft.

In deze paragraaf behandelen we applets die leerlingen inzicht in algebraïsche formules kunnen bijbrengen door de regels in te bedden in een bekende context: regels worden verbonden met meetkundige eigenschappen die leerlingen al kennen en met meetkundige modellen die de formules betekenis geven. Daarom spreekt men ook over *geometrische algebra*. Deze applets sluiten qua filosofie aan bij de voorbeelden uit UW 11/4 van oktober 1995, waarin we illustreerden hoe rekeneigenschappen meetkundig kunnen ondersteund worden.

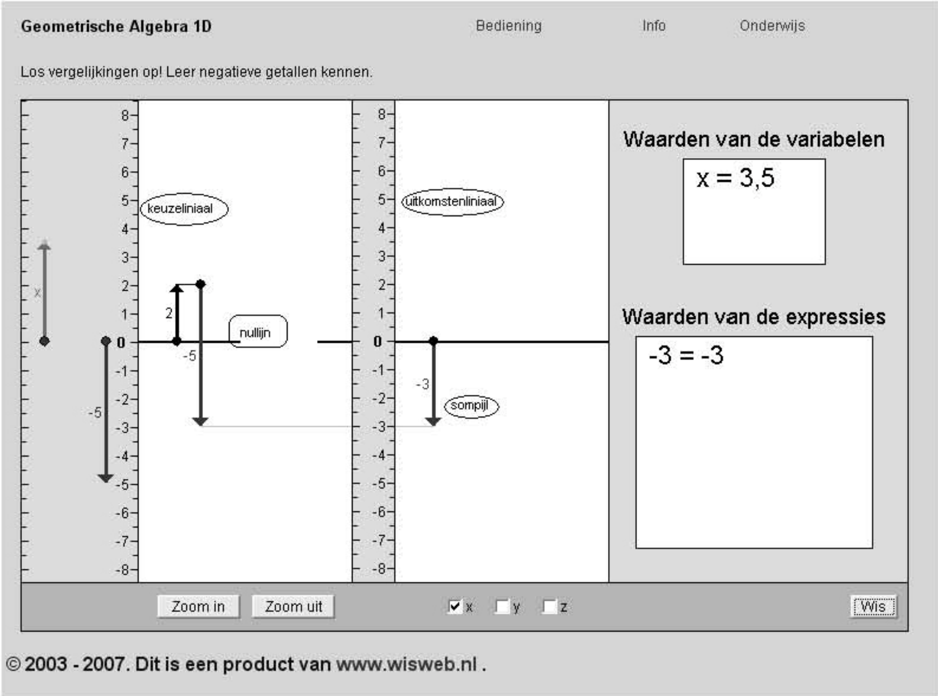
In het applet *geometrische algebra 1D* worden getallen gekoppeld aan pijlen. Tegengestelde getallen worden voorgesteld door pijlen met eenzelfde lengte. Bij positieve getallen wijst zo'n pijl 'van onder naar boven', bij een negatief getal is dat net omgekeerd. Ook de variabelen *x*, *y* en *z* worden voorgesteld met een pijl. Dit maakt leerlingen duidelijk dat variabelen zowel positieve als negatieve waarden kunnen aannemen. Door pijlen aan elkaar te koppelen, vorm je lineaire uitdrukkingen. Hiermee kunnen leerlingen de gelijkwaardigheid van veeltermen onderzoeken. We illustreren dat in onderstaande werktekst. We veronderstellen hierbij dat leerlingen de terminologie rond veeltermen reeds kennen.

Getallen en pijlen

Surf naar www.wisweb.nl. Klik op het rode woord applet. Klik dan op OK. Open het applet *'geometrische algebra 1D'*.

We maken eerst kort kennis met het werkscherm:

- In het grijze gebied links zie je (o.a.) een getal staan. Je kan dat getal veranderen in een ander (geheel) getal door te klikken op één van de getallen naast de keuzeliniaal.
- Merk op dat een pijl een kleur krijgt die afhangt van het toestandsteken. Klik hiervoor afwisselend op positieve en negatieve getallen van de keuzeliniaal. Tegelijkertijd verandert dan ook de zin van de pijlen: pijlen die bij positieve getallen horen wijzen naar boven, pijlen bij negatieve getallen naar beneden.
- Je kunt met dit applet de som van gehele getallen berekenen. We berekenen bijvoorbeeld $2+(-5)$.
  - Klik op het getal 2 op de keuzeliniaal;
  - verplaats de pijl zo dat de staart op de nullijn komt.
  - Selecteer het getal –5 op de keuzeliniaal.
  - Sluit deze pijl aan bij de vorige pijl. Leg de pijlen kop aan staart.
  - De som van 2 en –5 kun je aflezen van de sompijl.
- Telkens je dat wil, kun je een resultaat wissen met de knop rechts beneden.
- In het grijze gebied staat ook een variabele *x*. We kunnen dus uitdrukkingen maken met getallen en de variabele *x* erin. De variabele *x* staat voor om het even welk getal, maar het applet toont één van de mogelijke waarden. De waarde van de variabele *x* die getoond wordt, verander je door de kop van de *x*-pijl te verslepen. Merk op dat *x* zowel voor een positief als een negatief getal kan staan (niet noodzakelijk geheel).



1) Vorm een pijlencombinatie die hoort bij de som $x+x$.

a) De uitkomst van deze som kan positief of negatief zijn. Dit hangt af van de waarde die de veranderlijke *x* aanneemt. Onderzoek dit door de kop van de *x*-pijl te verslepen.

b) Hoe kun je $x+x$ nog schrijven? Kijk naar de uitkomst bij de sompijl.

c) De variabele *x* kan elk getal als waarde aannemen. Je antwoord bij vraag b klopt dus maar als de gelijkheid opgaat voor elke waarde die je aan *x* kunt toekennen. Controleer dat de gelijkheid inderdaad opgaat voor veel getallen door het eindpunt van de groene pijl in het linkse gebied te verschuiven.

2) Vorm een pijlencombinatie die hoort bij de term $3x$. Maak ook een pijlencombinatie voor $x+3$. Voor welke waarde van de *x*-pijl is $3x$ gelijk aan $x+3$? Blijft $3x$ gelijk aan $x+3$ als je de waarde van de *x*-pijl wijzigt? Welke conclusie trek je?

(Voor $x=\frac{3}{2}$ is 3x gelijk aan x+3, maar niet voor andere waarden. Bijgevolg is 3x verschillend van x+3).

3) Hoe kun je $2x+3x$ schrijven met één bewerking? Onderzoek dit met het applet: maak eerst $2x$ (hoe doe je dat?), maak ernaast $3x$ en hang dan de twee pijlen aan elkaar.

4) Je kan ook termen maken met negatieve coefficiënt:

a) Een negatieve coëfficiënt kun je verkrijgen door de *x*-pijl te slepen naar de nullijn, te klikken op de rechtermuisknop en de optie 'min' te selecteren.

b) Hoe maak je dan $-5x$?

5) Vereenvoudig $x-5x$. Kijk naar de uitkomst bij de sompijl.

6) Onderzoek hoe je de som $2x+3+3x$ eenvoudiger kunt schrijven. Leg de pijlen weer aan elkaar en lees de uitkomst af op de sompijl.

We werken nu met meer dan één variabele. Vink daarvoor y en z aan beneden op je scherm.

7) Maak nu de sompijl van $3x+2y$. Omdat x en *y* twee verschillende variabelen zijn, kunnen ze alle mogelijke getallen als waarden aannemen, los van elkaar. Controleer met het applet of je $3x+2y$ kunt vereenvoudigen.

8) Hoe kun je $3x+2+x-2y-5$ vereenvoudigen? Onderzoek dit met het applet.

9) Vereenvoudig de volgende som zo ver mogelijk: $(-x+2y+z-4)+(3x-2z)$. Maak hiervoor beide uitdrukkingen eerst apart en hang daarna de tweede achter de eerste.

10) Leg duidelijk uit hoe je tewerk gaat als je de som wil berekenen van twee veeltermen met variabelen *x*, *y* en *z*.

Geometrische algebra 2D is een uitbreiding van de zoëven behandelde applet. Pijlen kunnen hierbij niet alleen 'opgeteld' worden, maar ook 'vermenigvuldigd', door ze te associëren met de lengte en de breedte van een rechthoek. Het product van twee factoren stelt dus de oppervlakte van een rechthoek voor. Bovendien kunnen de gemaakte rechthoeken worden bewerkt (gesplitst, samengevoegd, losgemaakt…), waardoor leerlingen opnieuw gelijkwaardige uitdrukkingen ontdekken. We geven een voorbeeld.

Getallen en oppervlakten

Surf naar www.wisweb.nl. Klik op het rode woord applet. Klik dan op OK. Open het applet *'geometrische algebra 2D'*.

De werkwijze van dit applet is analoog aan die van 'geometrische algebra 1D'. Op je beginscherm kun je getallen selecteren door te klikken op de horizontale of verticale as. *x*-pijlen maak je door het *x*-vakje beneden op het scherm aan te duiden en de kop te slepen tot de gewenste 'lengte'. Je kan horizontale en verticale pijlen combineren in het werkveld, door de staarten aan elkaar te hangen. Op die manier vorm je rechthoeken. De oppervlakte van zo'n rechthoek staat in de rechterbovenhoek van je scherm.

1) Maak een rechthoek met als lengte 7 cm en als breedte $x+y$.

2) Kopieer deze rechthoek via de rechtermuisknop. Hou geen rekening met de bewerkingsbalk links bovenaan.

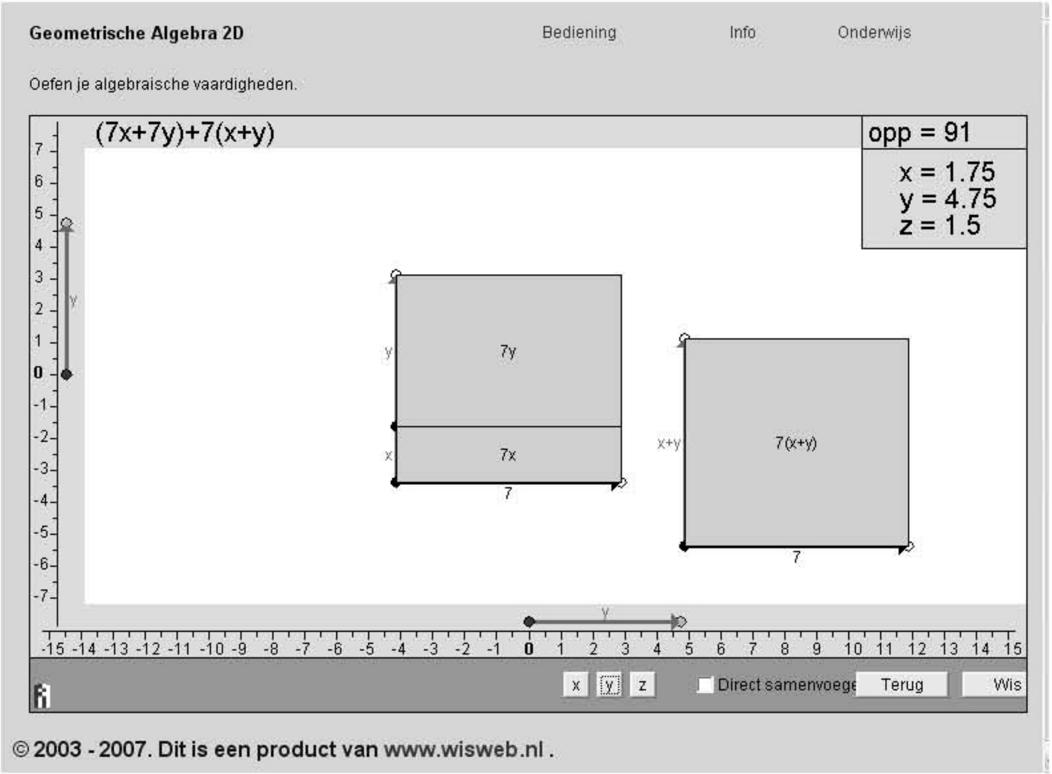
3) Kies via de rechtermuisknop voor de optie 'voeg samen'. Welke formule ontdek je?

4) Ga na of deze formule ook nog geldt als x en/of y negatieve waarden aannemen.

5) Hoe kun je de oppervlakte $x \cdot (3+2)$ schrijven als de oppervlakte van twee kleinere rechthoeken? Gebruik het applet om dit te ontdekken of te controleren.

6) Ga op zoek naar een formule voor $x \cdot (y+z)$. Denk opnieuw aan oppervlakten van rechthoeken.

7) Maak een rechthoek met oppervlakte $8x+12$.



In de voorbeelden die we tot nu toe behandelden, stond een letter telkens voor een willekeurig getal, een *variabele*. Bij het oplossen van een vergelijking is de betekenis van een letter helemaal anders: ze staat dan voor een *onbekende*: één (of enkele) getal(len) waarvoor de gelijkheid klopt. Dit aspect kan je bijvoorbeeld aanbrengen met *geometrische algebra 1D*, zoals we illustreerden in oefening 2 van de werktekst 'getallen en pijlen'. In de volgende paragraaf gaan we verder in op het zoeken van onbekenden.

4.4.2.3 Vergelijkingen

De laatste decennia is de klemtoon in het algebraonderwijs verschoven. Waar algebra vroeger veelal herleid werd tot rekenwerk is er nu meer aandacht voor het leren mathematiseren van situaties. Het opstellen van vergelijkingen en stelsels is m.a.w. belangrijker geworden. Inzicht in oplossingsmethoden van vergelijkingen en stelsels blijft echter onontbeerlijk. Maar we mogen niet vervallen in ingewikkelde, geforceerde rekenoefeningen. In dit hoofdstuk laten we zien hoe applets een rol kunnen spelen in beide aspecten.

a) Van vraagstuk naar vergelijking

Heel wat vraagstukken uit de eerste graad kunnen opgelost worden met vergelijkingen. Hierbij spelen 'vertaal'-vaardigheden een belangrijke rol. Het applet *taxi* van Wisweb kan een hulpmiddel zijn bij de stap van verhaal naar vergelijking.

Bij dit applet moeten leerlingen zes opgaven rond eenzelfde thema oplossen. Het verschil tussen formule en vergelijking wordt hierbij duidelijk gemaakt. Bewerkingen en hun omgekeerde worden gevisualiseerd met rekenpijlen. Uiteindelijk leiden de rekenpijlen tot vergelijkingen.

We voegen hier geen werktekst bij, aangezien dit applet leerlingen strikt stuurt: alle 6 opgaven moeten gemaakt worden.

b) Eerstegraadsvergelijkingen oplossen

Bij het oplossen van vergelijkingen zetten heel wat leerlingen foute stappen. Een mogelijke oorzaak hiervan is dat bij het aanbrengen van de rekenregels te snel verkort wordt, waardoor de begripsvorming fout loopt. Op die manier gebruiken leerlingen, zonder na te denken, aangeleerde, maar niet begrepen trucs. In deze paragraaf behandelen we twee applets die aan de hand van de weegschaalmethode uitleggen hoe je kunt komen tot gelijkwaardige vergelijkingen. Het eerste kun je vinden op de webstek van *Ratio* (*www.ratio.ru.nl*), het tweede op *Wisweb*.

Het grote voordeel van het applet van *ratio* is dat de weegschaal ook visueel zichtbaar is. Hierdoor kun je dit programmaatje al aanbieden in de beginfase van het leerproces. Helaas past er niet bij elke vergelijking een weegschaal. Verder werkt die visualisering alleen maar als je van beide leden evenveel aftrekt. Bovendien geeft het applet zelf aan wanneer je in beide leden een deling moet uitvoeren en het laat dit pas toe als je een vergelijking van de vorm $ax = b$ hebt.

De weegschaalmethode van *wisweb* wordt niet visueel ondersteund. Leerlingen moeten echter duidelijk aangeven welke stap ze willen zetten om tot een gelijkwaardige vergelijking te komen. Hierdoor zijn er verschillende oplossingswegen mogelijk. Het rekenwerk wordt door het applet zelf uitgevoerd. Alle eerstegraadsvergelijkingen kunnen met dit applet opgelost worden.

In de onderstaande werktekst bieden we oefeningen aan die niet voor alle leerlingen van het eerste jaar geschikt zijn. In het eerste jaar behoren immers enkel vergelijkingen van de vorm $a + x = b$ en $a \cdot x = b$ tot de basisleerstof. De gemengde vorm $ax + b = c$ is uitbreidingsleerstof voor het eerste jaar, maar basisleerstof voor het tweede jaar. We vermelden ook dat we binnen deze werktekst vrij snel overstappen van de ene vorm naar de andere. We vermoeden dan ook dat leerlingen tussendoor meer oefeningen moeten maken.

Surf naar www.ratio.ru.nl. Kies bij *applets* voor de laatste keuzemogelijkheid: *lineaire vergelijkingen*. Open de *weegschaalmethode*.

1) Typ de vergelijking $x + 2 = 9$ in bij ‘kies zelf’. Klik op het zwarte vinkje op de gele achtergrond. Om deze vergelijking op te lossen, moeten we aan één kant van de weegschaal enkel x als gewicht krijgen.

a) Hoeveel bollen moet je in het linkerlid wegvinken om enkel x te verkrijgen?

b) Wat moet je dan in het rechterlid doen om het evenwicht van de weegschaal te behouden?

c) Vervolledig het applet. Welke uitkomst vind je?

d) Hoe kan je zonder dit applet controleren of je uitkomst klopt?

e) Probeer je oplossingsmethode voor deze vergelijking eens te omschrijven zonder weegschaal:

   i) Welke bewerking moet je in het linkerlid uitvoeren om x te verkrijgen?

   ii) Wat moet je dus ook met het rechterlid doen?

2) Los de vergelijking $3x = 2x + 5$ op:

a) door gebruik te maken van het applet;

b) door de verschillende stappen die je zet te omschrijven.

3) Los de vergelijking $x - 4 = 7$ op:

a) Kun je hierbij nog steunen op het applet?

b) Omschrijf de stappen die je zet.

c) Controleer je oplossing.

4) Voer de vergelijking $6x = 5$ in.

a) Het applet leert je dat je beide leden moet delen door eenzelfde getal. Welk getal kies je om in het linkerlid x te verkrijgen?

b) Wat is dan de oplossing van de vergelijking?

5) We willen de vergelijking $\frac{1}{3}x = 5$ oplossen.

a) Kun je deze vergelijking oplossen m.b.v. het applet?

b) We lossen deze vergelijking op door te redeneren:

i) Welke bewerking moet je in het linkerlid uitvoeren om x te verkrijgen?

ii) Wat moet je dus ook met het rechterlid doen?

c) Controleer je oplossing.

6) We werken nu met de vergelijking $4x + 5 = 7$:

a) Los deze vergelijking op door het applet te volgen.

b) Omschrijf de stappen die je zet om deze vergelijking met bewerkingen op te lossen, zonder weegschaal.

7) We nemen de vergelijking $3x + 6 = 9$.

a) Gebruik het applet om deze vergelijking op te lossen.

b) In de eerste stap van de oplossing verplicht het applet je om van beide leden eenzelfde getal af te trekken. Kun je ook op een andere manier beginnen om deze vergelijking op te lossen? Welke?

Het volgende applet biedt je meer vrijheid in je werkwijze:

Surf naar www.wisweb.nl. Klik op het rode woord applet. Klik dan op OK. Open het applet *'vergelijkingen oplossen met weegschaal'*.

8) Los de vergelijking $3x + 6 = 9$ op met deze applet. Ga hierbij te werk zoals omschreven bij vraag 7b.

9) Los uit dit applet de vergelijkingen 1, 2, 3, 14, 15 en 17 op. Als dat niet goed lukt, probeer je oefeningen 4 en 6.

4.5 Bronnen

M. Roelens, 2008, Maar waarom? Bewijzen en redeneren in de onderbouw, Plenaire lezing op de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (november 2008), raadpleegbaar op http://www.nvvw.nl/media/downloads/jv2008/bewijzen_nvvw.pdf

M. Roelens, J. Willems, 2008, Algebralessen met applets, Uitwiskeling 24/1, 11-22

4.6 Toenemende abstractie van 6 tot 14 jaar. Werken met letters in de 1ste graad A-stroom. Maggy Van Hoof, begeleiding VSKO

Het leerplan van de 1ste graad A-stroom omschrijft verschillende wijzen waarop letters in de wiskunde kunnen aangewend worden. Problemen met letters in een latere fase komen soms voort uit een te snelle invoering van verschillende types lettergebruik.

Laten we even de verschillende types lettergebruik bekijken.

4.6.1 Letters als onbekenden

Leerlingen van de basisschool zijn vertrouwd met oefeningen en spelletjes zoals: “Ik denk aan een getal. Tel ik er 12 bij, dan bekom ik 15. Welk is het oorspronkelijke getal?”
De meeste leerlingen berekenen spontaan de oplossing met 15 – 12. Ze beseffen niet dat ze een vergelijking hebben opgelost. In feite lossen ze op: … + 12 = 15, een zogenaamde puntoefening.
Een verder gemathematiseerde vorm van deze spontane werkwijze is de vergelijking x + 12 = 15.
Deze *verdere mathematisering* is nodig omdat spontane werkwijzen niet zullen werken bij meer

complexe situaties. Werken met lege plaatsen zoals in puntoefeningen zal niet lukken bij hogere machten van de onbekende. Deze eenvoudige situatie biedt de gelegenheid om leerlingen te laten inzien hoe we in de wiskunde te werk gaan. Omdat de wiskundetaal kwalitatief beter wordt, kunnen we er later ook moeilijkere dingen mee beschrijven. In de eerste fase is het een ‘vorm’probleem. Toch legt een te snel overgaan op hogere vormen van vergelijkingen een drempel bij vele leerlingen. Een rustige instap is dus noodzakelijk.
De *onbekende x* verschijnt dus als een soort *plaatshouder* voor het voorlopig onbekende getal dat de oplossing is. In deze vergelijking staat x voor een *welbepaald getal*. Het oplossen van de vergelijking bestaat erin de vergelijking zo om te vormen dat de waarde van dat bepaalde getal snel af te lezen is, i.c. x is geëxpliciteerd in een lid, de getalwaarde in het andere.
Drie belangrijke bedenkingen hierbij.

- Bij de mathematisering hoort een goed inzicht van wat er met de letter bedoeld wordt. In de vergelijking $x + 12 = 15$ moet x zo gekozen worden dat de gelijkheid tussen rechter- en linkerlid gerealiseerd wordt. Daarvoor kunnen we doen alsof de vergelijking een gelijkheid is, en *de regels van gelijkheden* erop toepassen. (Een term overbrengen of een factor overbrengen; of een zelfde getal bij beide leden optellen of beide leden met een zelfde getal vermenigvuldigen). Het loont de moeite voor leerlingen die inzichtelijk willen werken van hen deze methodiek goed bij te brengen.
- In de vergelijking $3.x = 17$ is de wiskundige oplossing: $x = \frac{17}{3}$.

  Koppelen we dit echter aan de volgende situatie: “Ik heb € 17 op zak. Hoeveel kaarten van € 3 kan ik kopen?”, dan is de oplossing gelijk aan “5 kaarten”. Je moet immers de bekomen wiskundige oplossing afronden. De oplossing kan in deze situatie geen rationaal getal zijn, want het is een aantal.

  Is de situatie “17 leerlingen van een klas worden verdeeld over drie groepjes, hoeveel leerlingen telt elk groepje?”, dan helpt ook afronden en opronden niet. Noch 5 noch 6 biedt de oplossing. De meest voor de handliggende oplossing is: 6, 6 en 5.
  Met andere woorden een situatie kan leiden tot een beperkende voorwaarde op de soort getallen die als oplossing kunnen aanvaard worden. Het is belangrijk deze ‘voorwaarden’ op een natuurlijke wijze te laten ontstaan. Inderdaad je zou ook kunnen stellen: “los op $3.x = 17$ in $\mathbb{N}$. Wiskundig maak je wellicht dezelfde denkstappen om de “oplossing” te berekenen, maar met het besluit dat het bekomen resultaat niet tot de natuurlijke getallen behoort, en dus dat de vergelijking geen oplossing heeft. Het is evident dat dit verhaal een paar abstractiestappen hoger ligt dan de realistische situaties. Daarom gaat men er vakdidactisch van uit dat leerlingen best een tijd geconfronteerd worden met die *eenvoudige betekenisvolle situaties*.
- De uitdrukking $3.x = 17$ kan ook beschouwd worden als een zogenaamde uitspraakvorm. De letter x speelt dan niet de rol van een welbepaald getal, maar is een *veranderlijke* binnen een bepaalde gegeven verzameling. Merk dus de subtiele verandering die er gebeurt, en waarvoor vele leerlingen geen oog hebben.
  De vraag die bij een dergelijke uitdrukking gesteld wordt, is of de uitdrukking *waar of niet waar* is. De veranderlijke x moet daartoe wel gebonden worden. Een mogelijkheid is x een bepaalde waarde toe te kennen. Bijvoorbeeld voor $x = 6$ is $3.x = 17$ onwaar.
  Een andere mogelijkheid is dat de veranderlijke x in de uitspraakvorm *gekwantificeerd* wordt. Dat leidt tot uitdrukkingen van de vorm: $\forall x \in R : 3 \cdot x = 17$ of $\exists x \in R : 3 \cdot x = 17$ (met R de referentieverzameling). Zo is de tweede vergelijking een ware uitspraak als R = $\mathbb{Q}$, maar uiteraard onwaar als R = $\mathbb{N}$.
  Deze aanpak staat nog veel verder af van de concrete (reken)situaties van hiervoor. Het vergt van leerlingen al een redelijk abstract denken om deze wiskunde te begrijpen. Het is een maatschappelijke keuze dat in de eerste graad vooral basisvorming wordt gegeven. Voor de wiskundevorming betekent dit dat ze die basisvorming moet ondersteunen met een meer algemene benadering. Wiskunde beschikt daarvoor over vele troeven. Een doorgedreven wiskundige abstracte vorming spoort daarmee echter niet helemaal samen. We kunnen wel een aantal abstractere densporen aanbieden in verband met oriëntering. Leerlingen die later met het abstractere geconfronteerd zullen worden, kunnen dit op die leeftijd relatief gemakkelijk verwerven. De leerlingen die wat betreft abstract denkvermogen wat minder begaafd zijn, moeten hierdoor niet uitgesloten worden.

4.6.2 Letters in formules

Een tweede vorm van lettergebruik waar leerlingen in de basisschool al enigszins mee geconfronteerd werden is die van *letters in formules*. Zo kennen ze de formule voor de oppervlakte van een rechthoek, een driehoek en een cirkel. Ze drukken een algemeen verband uit tussen verschillende grootheden, bijvoorbeeld het verband tussen de oppervlakte van de rechthoek en de lengte en de breedte van de rechthoek. (Strikt genomen gaat het over het verband tussen de maatgetallen van deze grootheden bij vergelijkbare maateenheden). Vaak gebruiken leerlingen nog zogenaamde *woordformules*.

> *Voorbeelden*
> Oppervlakte rechthoek = basis x hoogte.
> Interest (op jaarbasis) = uitgezet kapitaal x jaarlijkse rentevoet x aantal jaar

Woordformules hebben het voordeel dat ze voor leerlingen gemakkelijk hanteerbaar zijn. Ze gebruiken vaak de vlotte *actieve taal*, vaak dus gewoon dagelijkse taal met hier en daar al een wiskundig teken dat verschijnt, een soort tussentaal. Dit soort woordformules is *een belangrijk tussenstadium* in het verwoorden van wiskundige relaties en is ook belangrijk in de wiskundetaalontwikkeling van leerlingen. Ze worden vaak als onnauwkeurig en slordig ervaren. Er is ook niet één vorm die als juist aangezien kan worden.
Binnen wiskunde moeten we groeien naar een *relatieve taal* (er worden duidelijke wiskundige verbanden aangegeven tussen de gegeven items) of een *functionele taal* (er worden duidelijke wiskundig relaties tussen wiskundige items gelegd). Uiteindelijk zullen grootheden in de formules gaan functioneren met letters al of niet nog verwijzend naar de woordformules (bijv. de eerste letter).
Dit is een *moeizaam leerproces*. In de verkenningsfase (uit de spiraal) zal meestal de actieve taal gebruikt worden en bij wiskundige relaties zal gewerkt worden met woordformules. Naarmate begrippen, eigenschappen … beter omschreven worden en beter in onderling verband gaan functioneren (dus op een hoger beheersingsniveau) zal ook een hogere taal gehanteerd worden. Het is dus niet correct te veronderstellen dat eens voor een onderdeel het correcte taalgebruik geleerd werd, dit automatisch in elk ander onderdeel zal overgenomen worden. Dit is waarschijnlijk verbonden met het beheersingsniveau waarop de kennis functioneert. Bij elk nieuw proces, nieuw onderdeel zal deze weg moeten afgelegd worden, al of niet in een versneld tempo.
De *letters,* die in de formules voorkomen, staan voor een bepaalde grootheid, de hoeveelheid ervan, de grootte ... In het kader van vraagstukken wordt relatief snel gedacht aan een *bepaalde waarde,* die aan de grootheid in dat kader kan toegekend worden, of moet berekend worden.

> *Voorbeeld*
> Bekijken we als voorbeeld het vraagstuk: “Een kapitaal van € 5 000 wordt op een spaarrekening geplaatst tegen een rentevoet van 2,5 %. Na een half jaar neemt men het geld terug op. Hoeveel zal men uitbetaald worden?”

Bij het oplossen zal men in de formule $I = k.i.t$ spontaan de letters vervangen door de in de opgave aangegeven waarden. De letters functioneren hier als ‘bepaalde waarden’, die weliswaar van situatie tot situatie verschillend kunnen zijn. De formule staat wel model voor telkens dezelfde berekening.
Karakteristiek voor een dergelijk gebruik van formules is dat

- ze meestal meer dan een letter bevatten, die meestal op een of andere wijze verbonden zijn met de context,
- de geëxpliciteerde verbanden vaak lineair zijn (vertolking van recht evenredigheid) of uit omgekeerd evenredigheid voortkomen,
- er weinig tekens in voorkomen,
- en vaak machten hebben met kleine en positieve exponenten.

Ook in de leersituatie met formules kunnen leerlingen de overstap maken naar *onbekenden* of *veranderlijken*.

> *Voorbeeld*
> In het voornoemde interestvraagstuk is I de ‘onbekende’. Maar de situatie is zo evident dat dit nauwelijks opgemerkt wordt.

De idee van onbekende wordt gemakkelijker gezien als we de vraag zouden stellen naar een bepaalde rentevoet om een vooropgezette interest te bekomen. Dan is i de onbekende, en leidt de formule tot een "vergelijking".
Het begrip veranderlijke komt tot uiting als we bijvoorbeeld zouden vragen naar een tabel van de interesten bij verschillende beleggingstijden: t wordt dan veranderlijke.

Enigszins vertrouwd vanuit de basisschool is het *herkennen van patronen en regelmaat*. Leerlingen kunnen hierbij bijvoorbeeld een volgende, of enkele volgenden in een rij vinden (op basis van gegeven getallen of meetkundige patronen). Het stapje verder dat hierbij kan gezet worden is het op zoek gaan naar een formule om de algemene situatie te beschrijven.

> *Voorbeeld*
> Beschouwen we hier enkele eenvoudige voorbeelden:
> 2, 5, 8, 11, …
> of 2, 6, 12, 20, …
>
> Het is al snel duidelijk dat de volgenden in de rij respectievelijk 14, 17, … en 30, 42, 56, … zijn.
>
> Een algemene formule voor het eerste voorbeeld is snel gevonden: bij elke stap wordt 3 bijgeteld bij het vorige.
> Algemeen: 2 plus 3 keer het aantal stappen, en dat laatste is dan 1 minder dan het rijnummer.
> Dat leidt in formulevorm tot 2 + 3.(n-1) of na enig rekenwerk 3.n-1. Wiskundig sterkere leerlingen hebben dat mogelijk zelfs al in een keer vastgesteld.
> Het omzetten van het tweede voorbeeld naar formulevorm is wellicht moeilijker voor leerlingen, omdat de regelmaat eerder opvalt in zijn recursieve vorm: voorgaande plus 2 keer het plaatsnummer. En ze beschikken niet over technieken van rijen om hier helderheid in te brengen.
> Met enige getallenkennis ziet men echter vlot de rij 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, … staan.
> De algemene term is dan vlot te schrijven als n.(n + 1) of $n^2 + n$.

In deze formules is n duidelijk een veranderlijke, die alle waarden kan aannemen van een gegeven verzameling, hier in principe $\mathbb{N}$. Men zou bijvoorbeeld de rij kunnen beperken tot 20 termen (dan behoort n tot $\{1,2,3,\ldots,20\}$).

Ook tabellen, eventueel opgesteld op basis van een gegeven grafiek, kunnen leiden tot het opstellen van formules. Meteen wordt een belangrijke stap in het denken duidelijk. Wil het algebraïsche rekenarsenaal goed functioneren in betekenisvolle situaties, dan zal ook ruimte moeten gemaakt worden voor het *opstellen van de relatie* tussen grootheden, gegeven getallen … Het algebraïsch rekenen zou op zichzelf kunnen functioneren, maar heeft maar zin in combinatie met het gebruik ervan bij het oplossen van problemen. Er moet dus veel aandacht besteed worden aan het onder algebra brengen van situaties. Onderdelen zoals veralgemenen van patronen, grafieken, tabellen en diagrammen bieden hiervoor uitgelezen kansen.

4.6.3 Letters in veralgemeningen

Een bijzondere vorm van formules is die van *de formalisering van definities en eigenschappen*. Deze vorm van wiskunde is vanuit de basisschool zo goed als onbekend bij de leerlingen.
Ze kennen eigenschappen vanuit het geven van voorbeelden (en het ontbreken ervan vanuit tegenvoorbeelden).

> De commutativiteit (wisseleigenschap) van de optelling wordt geïllustreerd met concrete *voorbeelden* als
>
> 3 + 14 = 14 + 3
> 23 + 56 = 56 + 23
> 3,25 + 4,72 = 4,72 + 3,25, bijv. in een situatie zoals 3,25 + 4,72 + 14,75

De lettervorm a + b = b + a is wellicht onbekend.
In de eerste leerfase zijn a en b in deze formule *plaatshouders* voor *bepaalde* getallen. Het is belangrijk dat leerlingen voldoende keren de weg van formule naar voorbeeld doorlopen, m.a.w. van formule

overgaan op getallenvoorbeelden. De letter moet gaan functioneren als *gegeneraliseerd getal*, en eigenlijk als *onbepaald getal* dat op elk ogenblik kan geconcretiseerd worden door er een bepaald getal voor in te vullen.

Andere *voorbeelden* van dit gebruik in het verdere curriculum (bijvoorbeeld tweede leerjaar):

$a^2 \,.\, a^3 = a^5$

$2^a \,.\, 2^b = 2^{a+b}$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Nog drie bedenkingen hierbij.

- Bij voorbeelden als $2a + 3a = 5a$ wordt vaak als goedbedoelde ondersteunende concretisering gegeven dat “twee appels en drie appels samen toch vijf appels” zijn. Voorgaande uitleg toont dat men zich hiermee op het allerlaagste begripsniveau bevindt, veraf van de abstractie die men beoogt. Deze concretiseringen werken een goede begripsvorming dus niet in de hand, omdat de leerling bij de letters dan vaak aan concrete “dingen” blijft denken. Vaak merkt men al aarzeling bij de leerlingen als $2a + 3a = 5a$ wat verderop plots staat voor “twee peren en drie peren …”. Het voorgaande toont dat het letterbegrip in deze situatie precies naar ‘onbepaaldheid’ (gegeneraliseerd getal) leidt. De leerling moet precies de concrete dingen overstijgen. De weg via getalwaarden ligt hier voor de hand.
- Uitdrukkingen zoals $a + b = b + a$ zijn weer uitspraakvormen.
  - De vervanging van a en b door getallen leidt tot een ware uitspraak.
  - Binding kan ook door kwantificering, in het bijzonder met de al-kwantoren. Uit het voorgaande is duidelijk dat de leerlingen alleszins inzicht moeten verwerven in een *vorm van algemeenheid* bij deze formule.

    In een aantal gevallen is het zinvol om deze algemeenheid vorm te geven in de formule zelf (door gebruik van de al-kwantor). Dat geldt misschien nog sterker als op die algemeenheid een beperking zou gelden (bijvoorbeeld dat een deler verschillend van nul moet zijn). Ervaring leert dat niet alle leerlingen dergelijke formalisering met kwantoren aankunnen. Het leidt vaak tot een stuntelig wiskundig taalgebruik zowel mondeling als formeel. Een prematuur gebruik van te formele taal brengt eerder schade toe aan het vlotte taalgebruik. Daarom is het slechts zinvol leerlingen daarmee te confronteren als ze gaan voor een doorstroming met sterke wiskunde.
- Over het algemeen gebruikt men letters voor getallen. In het tweede jaar worden leerlingen geconfronteerd met een stap verder. De rekenregels en formules die gelden voor getallen worden ook van toepassing voor algebraïsche uitdrukkingen. Bijzonder in trek daarbij zijn formules als $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. (Merk op dat weinigen onder ons hier de behoefte voelen deze formule te gaan kwantificeren in deze situatie.) De letters a en b worden achtereenvolgens eentermen, tweetermen … En als kers op de taart van de verwarring worden a en b ook nog lettervormen in a en b zelf?

  Merk op dat leerlingen dit bewust als een uitbreiding, als een verdere abstractie moeten ervaren binnen het wiskundige systeem. Op die wijze krijgen ze ook inzicht in hoe het systeem op zich wordt opgebouwd. Dat brengt hen op een wiskundig hoger beheersingsniveau. Belangrijk is echter te beseffen dat voor een goede abstractie de lager gelegen beheersingsniveaus voldoende moeten bereikt zijn, anders werkt die stap alleen maar totaal zinloos functioneren van het algebra-apparaat in de hand, met een onvoorstelbaar arsenaal aan onbegrijpelijke fouten tot gevolg.

4.6.4 Letters als veranderlijke

In het voorgaande zijn al een aantal leersituaties aangegeven waarbij het begrip *veranderlijke* kan ontstaan, vanuit een onbekende in een vergelijking, vanuit formules. We voegen hieraan nog twee situaties toe.

Voorbeeld

“In een winkel kosten balpennen € 4 per stuk, vulpotloden € 3 per stuk. Hoeveel balpennen en potloden kan ik voor € 40 kopen?” Het vraagstuk leidt gemakkelijk tot de vergelijking
$4.b + 3.v = 40$. Deze vergelijking heeft een aantal oplossingen: (1,12); (4, 8) en (7, 4). De letters in de vergelijking staan dus niet meer voor één bepaalde waarde, maar voor enkele getallen. De letters kunnen een veranderlijke waarde aannemen.

Naast het begrip (bepaalde) onbekende in vergelijkingen en onbepaalde in veralgemeende eigenschappen moeten de leerlingen het begrip veranderlijke verwerven.
Doorheen het werken met formules, zoals bij veralgemeningen, of bij het oplossen van problemen ontstaan de begrippen eenterm en veelterm.
Zie de voorbeelden p.4 $3.n - 1$, $n.(n + 1)$ of $n^2 + n$
Ook deze uitdrukkingen krijgen een geabstraheerde wiskundige betekenis en gaan een eigen abstract leven leiden.

Voor vervolgstudies met een wiskundige onderbouw is een vaardigheid in het werken met algebraïsche uitdrukkingen noodzakelijk. Nadat mathematisering geleid heeft tot nieuwe uitdrukkingen, is het te verantwoorden een beperkte training op te zetten om hiermee vlot te kunnen omgaan. Wel geldt hier hetzelfde inzicht als voor het rekenen met getallen. We beschikken in de praktijk al over voldoende software om relatief ingewikkelde uitdrukkingen te manipuleren, vaardigheid betekent dus vlotheid in relatief eenvoudige situaties. Alleszins zullen de leerlingen het in dergelijke situaties veel gemakkelijker verwerven dan in overdreven complexe situaties. Leerlingen die in het hoger onderwijs andere technieken nodig hebben, zullen tegen die tijd ruim de mogelijkheid hebben die te verwerven. De leerfase in het begin, en voor alle leerlingen nog in dezelfde basisvorming, hoeft daardoor niet gehypothekeerd te worden. Vandaar dat het algebraïsche rekenwerk zonder problemen kan beperkt worden tot het rekenen met veeltermen in één veranderlijke en eentermen met maximaal twee veranderlijken.

4.6.5 Bronnen

Actualisering leerplan wiskunde 1ste graad A-stroom VVKSO D/1997/0279/032,
syllabus 2 Letterrekenen, 2005

VI - Leerkansen voor alle leerlingen

De verschillen in de wiskundeprestaties tussen groepen leerlingen zijn de aanleiding om in de conferentie over wiskunde aandacht te besteden aan de kansen die het Vlaamse onderwijs aan alle leerlingen biedt. De laatste jaren staat het principe van kansengelijkheid centraal in het Vlaamse onderwijsbeleid. Ook voor minister Pascal Smet is kansengelijkheid één van de belangrijke uitgangspunten voor zijn beleidsnota.

"Gelijke kansen bieden, heeft met vier fenomenen te maken en als die vier niet aangepakt worden, is het niet goed. (1) We moeten zorgen voor minder ongekwalificeerde uitstroom. (2) We moeten de zwakkere leerlingen optillen. (3) We moeten de sociale erfelijkheid van lage scholing doorbreken. (4) We moeten de sterkere leerlingen en studenten beter doen presteren. Als één van deze vier elementen wegvalt uit de definitie van 'gelijke kansen bieden' zijn er geen gelijke kansen. Het realiseren van gelijke kansen is ambitieus maar nodig. We zetten daarom deze legislatuur in het teken van 'grenzen verleggen voor elk talent" (Smet, 2009, p.6).

In dit hoofdstuk wordt nagegaan in welke mate er verschillen zijn in leerlingprestaties op de wiskundepeilingen en met welke kenmerken deze verschillen samenhangen (6.1). Vervolgens worden deze bevindingen naast de resultaten van ander onderzoek gelegd (6.2). Deze informatie wordt aangevuld met bijdragen van andere onderwijspartners over dit thema (6.3).

Inhoudstafel

1 Peilingsresultaten

De overheid laat in de peilingen nagaan of er systematische verschillen zijn tussen groepen leerlingen in het percentage leerlingen dat de eindtermen of ontwikkelingsdoelen bereikt. Er zijn in de peilingen steeds leerlingen die een grotere of een kleinere kans hebben om een doorsnee-peilingsopgave juist op te lossen. Deze informatie wordt in de drie brochures met de peilingsresultaten volledig opgenomen onder de titel: ‘Analyse van verschillen tussen leerlingen, klassen en scholen’.

De onderzoekers gaan na in welke mate de verschillen tussen groepen van leerlingen samenhangen met kenmerken van de leerlingen die zij objectief kunnen vaststellen. Met behulp van statistische analyses gaan ze na of deze verschillen toe te schrijven zijn aan het individueel niveau, het klasniveau of het schoolniveau.

Verschillen op schoolniveau kunnen enerzijds samenhangen met verschillen in schoolcontext waar de school weinig zelf kan aan veranderen (bijvoorbeeld de ligging van de school), maar ze kunnen ook samenhangen met verschillen in schoolbeleid (bijvoorbeeld het beleid van de school in verband met het groeperen van leerlingen). Een school kan bewust keuzes maken voor homogene of heterogene groepen, en mogelijk beïnvloeden deze keuzes het resultaat van de leerlingen in deze school: dit zijn verschillen op schoolniveau. Verschillen op klasniveau kunnen het gevolg zijn van de aanpak van een leerkracht. Verschillen op individueel niveau zijn het gevolg van eigenschappen van individuele leerlingen: jongen of meisje, de taal die de leerling thuis gebruikt, de ondersteuning die de leerling thuis krijgt. In de drie wiskundepeilingen is het grootste aandeel van de prestatieverschillen tussen leerlingen toe te schrijven aan de verschillen tussen individuele leerlingen. Dit geldt voor elke peiling in basis- en secundair onderwijs.

In een volgende fase zoeken de onderzoekers welke kenmerken samenhangen met de prestatieverschillen tussen leerlingen. Bij de eerste Vlaamse peilingen werkte men nog niet met achtergrondvragenlijsten. Het is dan wel mogelijk om de verschillen toe te schrijven aan de verschillende niveaus, maar het is onmogelijk om kenmerken te vinden waarmee deze verschillen samenhangen. In volgende peilingen vulden leerlingen, ouders, leerkrachten en directies achtergrondvragenlijsten in. Dankzij deze informatie kunnen de onderzoekers vaststellen welke kenmerken samenhangen met de verschillen in de prestaties van groepen leerlingen.

Het is in het peilingsonderzoek onmogelijk om te zeggen of deze kenmerken de prestaties van de leerlingen veroorzaken: in dergelijk onderzoek wordt enkel samenhang vastgesteld. Het is mogelijk dat de gevonden samenhang tussen een bepaald kenmerk (bijvoorbeeld schoolse vertraging) en verschillen in leerlingprestaties eigenlijk het gevolg is van een derde kenmerk dat niet bevraagd werd (bijvoorbeeld afkomst) maar dat zowel een impact heeft op het kenmerk als op de prestatie.

In dit hoofdstuk worden een aantal kenmerken besproken die in meerdere peilingsonderzoeken samenhangen met verschillen in leerlingprestaties. Er is een onderlinge samenhang tussen bepaalde achtergrondkenmerken van leerlingen. Zo zitten anderstalige leerlingen en leerlingen met leermoeilijkheden vaker achter op leeftijd. Om na te gaan of de verschillen in toetsprestaties samenhangen met bepaalde kenmerken van leerlingen, voeren de onderzoekers statistische controles uit voor de invloed van verschillende beschikbare kenmerken tegelijkertijd. Op die manier wordt op statistische wijze nagegaan of er een effect is van één kenmerk (bijvoorbeeld achter zitten op leeftijd) indien de leerlingen in alle andere opzichten aan elkaar gelijk zouden zijn. Zo kan onderzocht worden wat en hoe groot het effect is van achter zitten op leeftijd los van de mogelijke invloed van de andere kenmerken zoals thuistaal en leermoeilijkheden. De effectgroottes die in dit hoofdstuk soms vermeld worden, gelden dus voor dat bepaalde kenmerk afzonderlijk. Voor leerlingen die aan meerdere kenmerken voldoen, kunnen de effectgroottes worden opgeteld. Bijvoorbeeld als jongens 5% meer kans hebben dan meisjes om een doorsneepeilingsopgave succesvol op te lossen, en leerlingen die uitsluitend Nederlands spreken 3% meer kans dan hebben dan anderstalige leerlingen, dan mogen we veronderstellen dat een Nederlandstalige jongen 8% meer kans heeft om een doorsneepeilingsopgave correct op te lossen dan een anderstalig meisje.

Hieronder worden achtereenvolgens de effecten van thuistaal, socio-economische situatie, GOK-concentratiegraad van de school, leermoeilijkheden, geslacht, schoolloopbanen, de waardering voor wiskunde en de rol van de leerkracht besproken.

1.1 Thuistaal

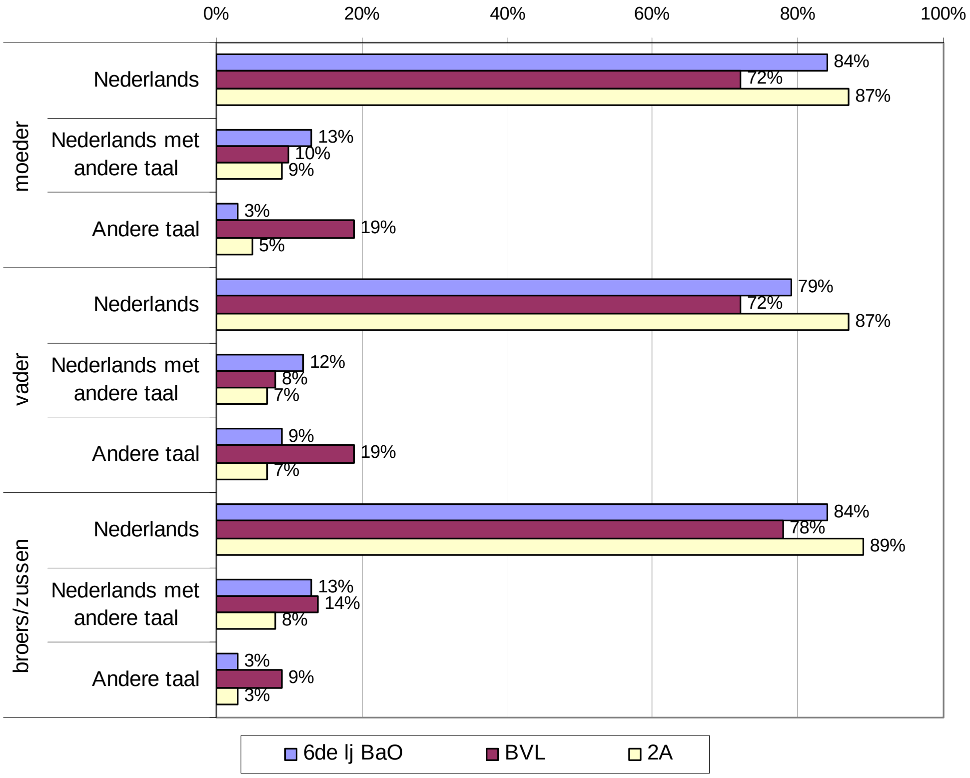
De meeste leerlingen in Vlaanderen spreken thuis Nederlands met al hun huisgenoten. Sommige leerlingen gebruiken uitsluitend een andere taal, en er is ook een groep leerlingen die thuis meerdere talen spreekt. Uit de representatieve steekproeven van verschillende wiskundepeilingen blijkt dat in de A-stroom van de eerste graad secundair onderwijs meer leerlingen thuis uitsluitend Nederlands spreken dan in het zesde leerjaar van het basisonderwijs. In de B-stroom van de eerste graad secundair onderwijs zijn er duidelijk nog minder Nederlandstalige leerlingen (Figuur 6.1).

In de drie wiskundepeilingen vinden de onderzoekers steeds dat leerlingen slechter scoren als hun thuistaal niet enkel Nederlands is. Het effect is niet voor alle toetsen even groot.

Ook in andere peilingen die eerder in Vlaanderen werden afgenomen voor andere vakken of leergebieden werden gelijkaardige effecten van thuistaal vastgesteld. Leerlingen die thuis niet enkel Nederlands spreken doen het significant minder goed dan leerlingen die thuis uitsluitend Nederlands spreken. Dit werd vastgesteld in de volgende peilingen:

- wereldoriëntatie in het basisonderwijs (2005)
- biologie in de A-stroom van de eerste graad secundair onderwijs (2006)
- Nederlands lezen en luisteren in het basisonderwijs (2007)
- wiskunde in de B-stroom van de eerste graad secundair onderwijs (2008)
- wiskunde in de A-stroom van de eerste graad secundair onderwijs (2009)
- wiskunde in het basisonderwijs (2009)

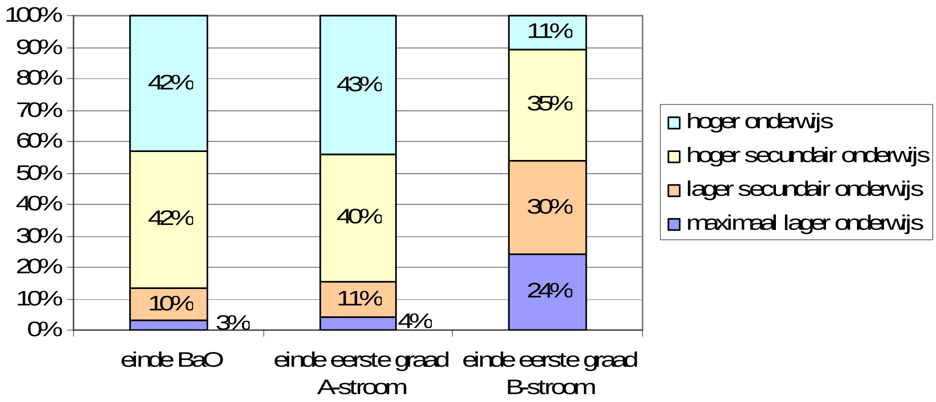
Bij de peilingen Frans ligt het anders omdat de leerlingen die thuis Frans spreken hier natuurlijk in het voordeel zijn.



Figuur 6.1 Taal die de leerlingen uit het zesde leerjaar lager onderwijs, het beroepsvoorbereidend leerjaar (BVL) en tweede leerjaar van de A-stroom (2A) van de eerste graad spreken met hun ouders en broers of zussen

1.2 Sociaal-economische thuissituatie en cultureel kapitaal

De onderzoekers vinden ook telkens een effect van de sociaal-economische thuissituatie op de prestaties van de leerlingen. Leerlingen in een minder gunstige sociaal-economische situatie hebben een lagere kans om een doorsnee-opgave in de peilingen juist op te lossen. Dit effect wordt gemeten in de drie wiskundepeilingen, maar ook in de drie peilingen naar taal die werden afgenomen in het basisonderwijs en de eerste graad van het secundair onderwijs in 2007 en 2008. In de peilingen wordt de sociaal-economische thuissituatie vastgesteld met een aantal variabelen uit de oudervragenlijst zoals het opleidingsniveau en het beroep van de ouders. Het opleidingsniveau van de moeder wordt in onderwijsbeleid vaak gebruikt als een belangrijke indicator voor de socio-economische thuissituatie. Uit Figuur 6.2 blijkt dat zowel in het basisonderwijs als in de A-stroom van de eerste graad meer dan 80% van de moeders minstens een diploma secundair onderwijs heeft. In de B-stroom is dat minder dan de helft van de moeders.



Figuur 6.2 Vergelijking van het hoogste opleidingsniveau van de moeders van leerlingen uit het zesde leerjaar lager onderwijs, het tweede leerjaar van de eerste graad (A-stroom) of het beroepsvoorbereidend leerjaar (B-stroom)

Naast thuistaal vinden de onderzoekers ook telkens een effect van het aantal boeken dat de leerling thuis heeft. Dit is een indicator voor het cultureel kapitaal in het gezin waarin de leerling opgroeit, en wordt in de achtergrondvragenlijst aan de leerlingen gevraagd. Ook voor deze indicator zijn er grote verschillen tussen de leerlingen van het basisonderwijs en de A-stroom van de eerste graad enerzijds en de leerlingen van de B-stroom anderzijds. Daar waar in het basisonderwijs en de A-stroom ongeveer 30% van de leerlingen maximum 25 boeken hebben, is dat bij 60% van de leerlingen uit de B-stroom het geval.

1.3 GOK-concentratiegraad van de school

In de peilingen wordt ook nagegaan in welke mate de GOK-concentratiegraad van een school samenhangt met betere of minder goede resultaten. Daarbij vergelijken de onderzoekers de prestaties van de leerlingen met de GOK-concentratiegraad van de hele school, dus niet enkel met de concentratie aan GOK-leerlingen in de gepeilde klassen. Hoe hoger de concentratiegraad van GOK-leerlingen in een school, hoe lager de leerlingen in de eerste graad (A- en B-stroom) scoren voor wiskunde. Dit effect is ook waarneembaar in de peiling wiskunde in het basisonderwijs voor het domein ‘strategieën en probleemoplossen’, maar niet voor de twee andere onderzochte domeinen.

Bij de peiling wiskunde in de B-stroom was het ook mogelijk om na te gaan of er een samenhang was tussen de GOK-concentratiegraad van de school en de leerwinst die geboekt werd met de leerlingen. Uit de resultaten bleek dat leerlingen die schoollopen in een school met een hogere concentratiegraad gemiddeld een lagere leerwinst halen dan leerlingen die met eenzelfde beginsituatie gestart zijn in scholen met een lagere GOK-concentratiegraad.

1.4 Leermoeilijkheden

In de peilingen vragen de onderzoekers in de oudervragenlijst of hun kind een diagnose heeft voor een bepaalde (leer-)moeilijkheid, handicap of ziekte. In het basisonderwijs en de A-stroom van het secundair onderwijs geeft 19% van de ouders aan dat er een diagnose is, in de B-stroom is dat 30%. Scholen en ouders kunnen zowel binnen als buiten de school extra zorg voorzien voor leerlingen die daar nood aan hebben. In het basisonderwijs krijgt 19% van de leerlingen extra zorg binnen of buiten de school, in de A-stroom van het secundair onderwijs is dat 17% en in de B-stroom 14%. Voor leerlingen in de B-stroom wordt blijkbaar minder extra zorg voorzien, terwijl er net een hogere concentratie is aan leerlingen die extra zorg nodig hebben. Mogelijk krijgen leerlingen in de B-stroom minder extra zorg in en buiten de school omdat ze een aangepast curriculum volgen.

In het basisonderwijs presteren leerlingen met dyslexie minder goed voor wiskunde dan leerlingen zonder problemen. In de B-stroom doen leerlingen met dyslexie het dan weer beter dan leerlingen zonder problemen. In de A-stroom van het secundair onderwijs is er geen effect voor dyslexie.

In de peiling wiskunde van het basisonderwijs hebben leerlingen met dyscalculie 16% minder kans om een doorsnee-peilingsopgave over het domein 'meten en meetkunde' correct op te lossen dan leerlingen zonder problemen. Voor het domein 'getallen en bewerkingen' is die kans 25% lager en voor het domein 'strategieën en probleemoplossen' is dat 19% lager. Ook in de eerste graad hebben leerlingen met dyscalculie een verlaagde kans om een doorsnee-peilingsopgave met succes op te lossen: in de B-stroom verlaagt de kans op succes met 21%, in de A-stroom met 33%.

1.5 Jongens - meisjes

In de drie wiskundepeilingen presteren jongens significant beter dan meisjes. In het basisonderwijs hebben jongens 5% meer kans dan meisjes om een doorsnee-opgave correct op te lossen, in de B-stroom is dat 3% en in de A-stroom 0,6% meer kans.

Jongens presteerden ook beter in de peiling biologie in de A-stroom van de eerste graad.

Bij de talige peilingen Nederlands en Frans in het basisonderwijs scoorden de meisjes beter.

1.6 Schoolloopbanen

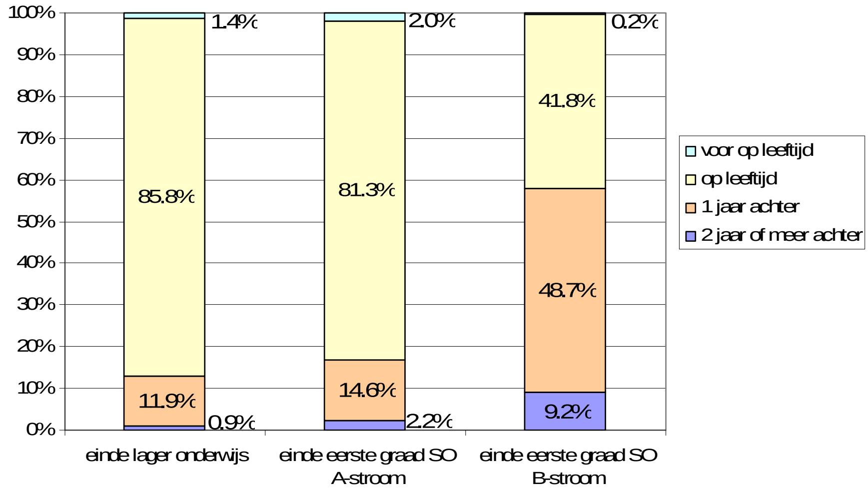
Zittenblijvers hebben vaak een verlaagde kans om een doorsnee-peilingsopgave juist op te lossen. Voor leerlingen die een jaar achter zitten op leeftijd, variëren de effecten in de wiskundepeilingen tussen 7 en 10% minder kans om een doorsnee-peilingsopgave succesvol op te lossen. Zittenblijven staat niet los van andere problemen die zich kunnen voordoen in de schoolloopbaan van de leerlingen. Zoals ook eerder gemeld, versterken deze effecten elkaar: een zittenblijver uit een sociaal-economisch minder gunstige thuissituatie, heeft minder kans op succes in de peiling dan een zittenblijver met een gunstige sociaal-economische achtergrond.

Uit de peiling Nederlands (lezen en luisteren) in het basisonderwijs in 2008 bleek dat veel leerkrachten zittenblijven een goede maatregel vinden die ervoor kan zorgen dat leerlingen beter functioneren op school.

1.6.1 Gegevens over de schoolloopbaan in het basisonderwijs

In het gewoon basisonderwijs zitten leerlingen meestal in heterogene klasgroepen. Voor leerlingen in het gewoon onderwijs die bijzondere zorg nodig hebben, kan de school die zorg voorzien in de gewone klas of daarbuiten (bijvoorbeeld binnenklasdifferentiatie, niveaugroepen, contractwerk, ondersteuning of remediëring door zorgleerkracht).

De steekproef van de peiling wiskunde in het 6de leerjaar geeft een beeld van het aantal leerlingen dat op het einde van het gewoon basisonderwijs schoolse vertraging heeft opgelopen. Dertien procent van deze leerlingen heeft één of meer jaren achterstand (Figuur 6.3). Leerlingen die een of meer jaren achterzitten op leeftijd presteren minder goed voor wiskunde dan leerlingen die op leeftijd zitten.



Figuur 6.3 Verdeling van de leerlingen volgens leeftijd op het einde van het 6de leerjaar, op het einde A-stroom en de B-stroom van de eerste graad

1.6.2 Gegevens over de schoolloopbaan in het secundair onderwijs

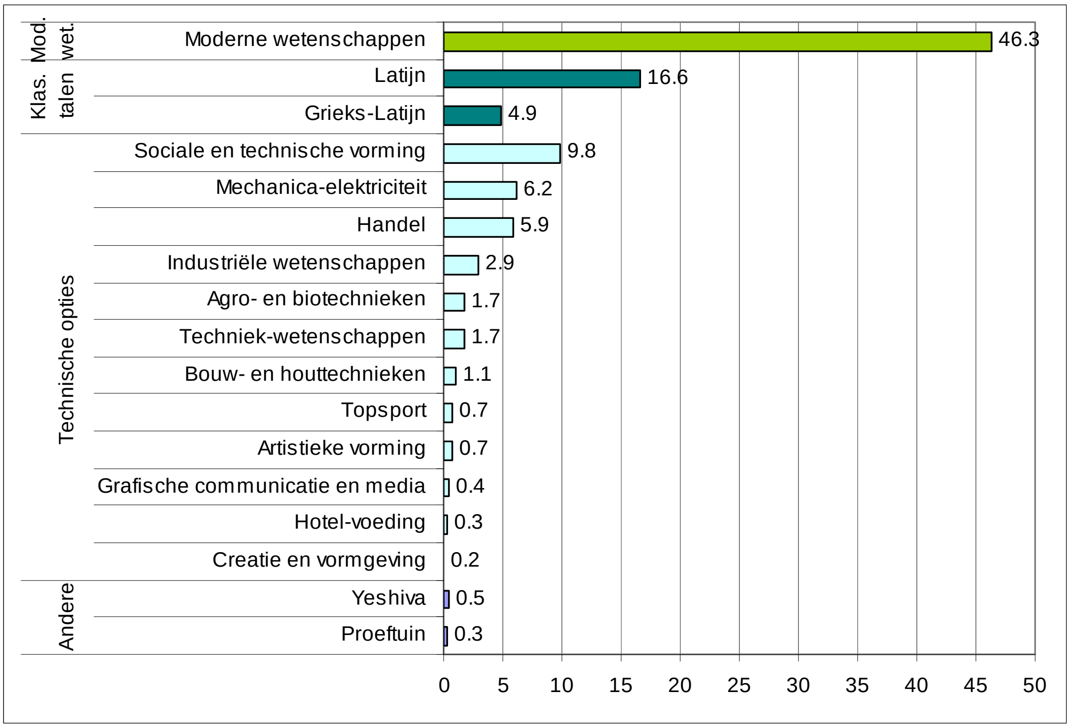
Hieronder bespreken we de schoolse vertraging in de A- en de B-stroom en de prestatieverschillen in de A- en de B-stroom.

Gegevens over schoolse vertraging in de eerste graad secundair onderwijs

In de steekproef van de peiling wiskunde in de B-stroom zit minder dan de helft (42%) van de leerlingen in het beroepsvoorbereidend leerjaar (BVL) op leeftijd (Figuur 6.3). Ongeveer de helft (49%) zit één jaar achter en bijna 1 op de 10 leerlingen 2 of meer jaar. Elf leerlingen (0,2%) zitten voor op leeftijd. In het tweede leerjaar van de eerste graad (A-stroom) zit gemiddeld 17 procent van de leerlingen uit de peilinggssteekproef achter op leeftijd. Ook in de A- en de B-stroom presteren leerlingen met schoolse vertraging minder goed op de wiskundepeilingen dan leerlingen die op leeftijd zitten.

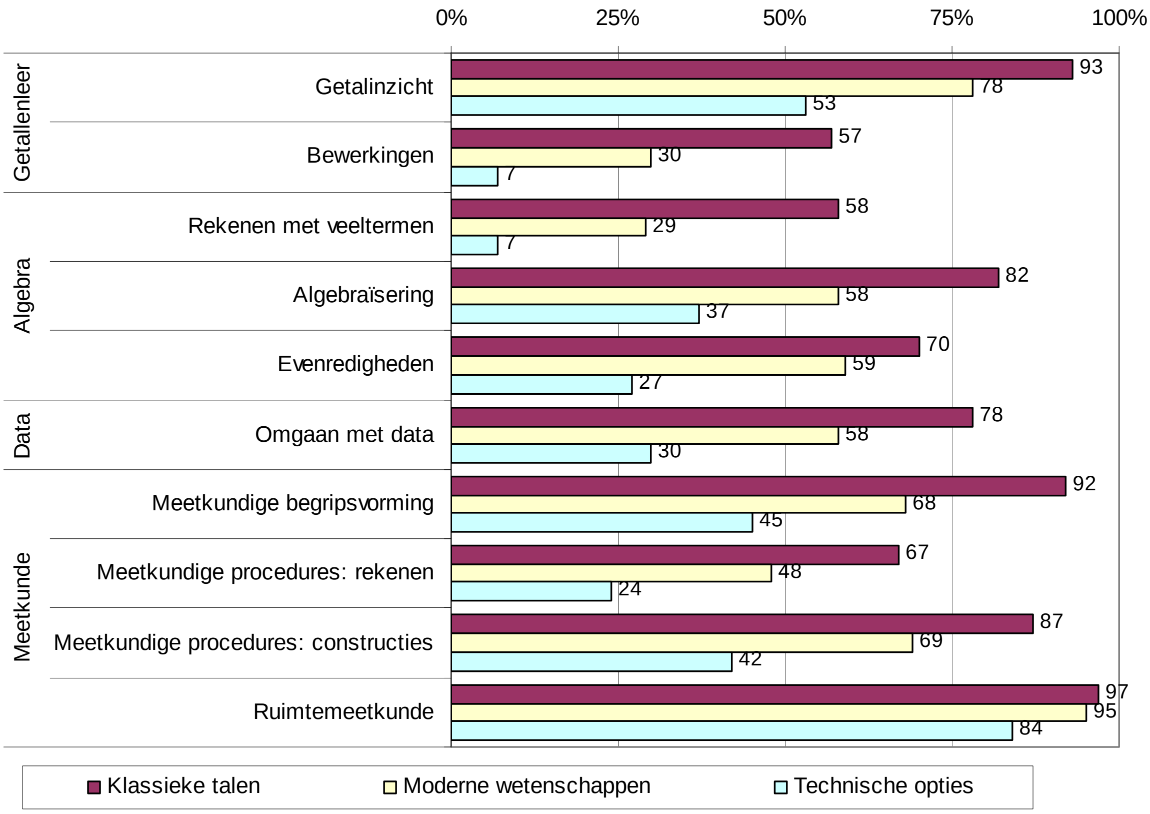
Verschillen in prestaties per optiegroep in de A-stroom

In de A-stroom kunnen de leerlingen van het tweede leerjaar voor verschillende basisopties kiezen. Aan de hand van deze basisopties werden de leerlingen uit de steekproef ingedeeld in 3 grote optiegroepen: moderne wetenschappen, klassieke talen, technische optiegroep (Figuur 6.4). 46% van de leerlingen behoort tot de optiegroep moderne wetenschappen, 22% tot de optiegroep klassieke talen en 32% volgt een technisch gerichte basisoptie. Bijna 1% van de leerlingen volgt een basisoptie Yeshiva of proeftuin. Zij werden niet in één van deze optiegroepen ondergebracht. De verdeling van de leerlingen over de verschillende basisopties en optiegroepen komt overeen met de reële verdeling in de totale populatie.



Figuur 6.4 Verdeling van de leerlingen volgens optiegroep en basisoptie

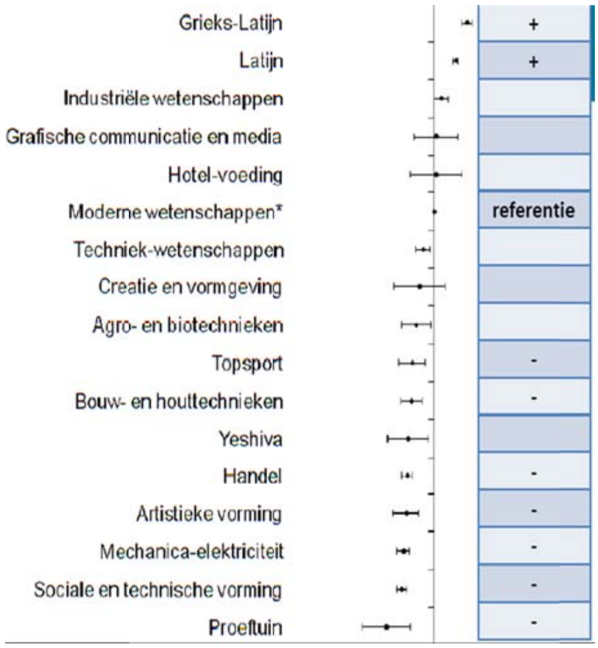
Uit de peiling blijkt dat er grote verschillen zijn in wiskundeprestaties tussen de leerlingen uit de verschillende optiegroepen. Figuur 6.5 geeft een beeld van de gemiddelde peilingsresultaten per optiegroep.



Figuur 6.5 Percentage leerlingen per optiegroep dat de eindtermen haalt

In de optiegroep klassieke talen beheersen de meeste leerlingen de eindtermen. De resultaten voor moderne wetenschappen lijken sterk op de resultaten van de totale steekproef. Minder leerlingen uit de technische opties bereiken de eindtermen, enkel voor 'ruimtemeetkunde' en 'getalinzicht' beheerst meer dan de helft van de leerlingen de eindtermen. Deze tendens is ook te zien bij andere peilingen in de eerste graad.

De leerlingen in de technische opties vormen een zeer heterogene groep. Zo bereiken ongeveer evenveel leerlingen in de basisoptie industriële wetenschappen de eindtermen als in de basisoptie moderne wetenschappen. Voor een aantal eindtermen (zeker binnen het domein meetkunde) halen in verhouding meer leerlingen in industriële wetenschappen de eindtermen dan in moderne wetenschappen. Leerlingen uit de basisopties industriële wetenschappen, techniek-wetenschappen, creatie en vormgeving, grafische communicatie en media, agro- en biotechnieken, hotel-voeding en Yeshiva weken niet significant af van de leerlingen uit moderne wetenschappen. In Figuur 6.6 worden de prestaties van de leerlingen uit de verschillende basisopties onderling met elkaar vergeleken. De horizontale lijntjes per basisoptie geven een betrouwbaarheidsinterval aan. Wanneer de lijntjes van twee verschillende basisopties met elkaar overlappen is er geen significant verschil in prestaties. Zo kunnen we zien dat de meeste technische basisopties onderling niet significant verschillen qua wiskundeprestaties. Wanneer de betrouwbaarheidsintervallen niet overlappen is er wel een betekenisvol verschil. Zo kunnen we bijvoorbeeld vaststellen dat leerlingen uit industriële wetenschappen duidelijk beter presteren dan leerlingen uit de meeste andere technische basisopties. Voor sommige basisopties zijn de resultaten weergegeven met een breed betrouwbaarheidsinterval. Dit komt doordat slechts een beperkt aantal leerlingen uit deze basisopties in de steekproef van de peiling zat. Met de interpretatie van de resultaten van deze dunner bevolkte basisopties moet dan ook voorzichtig omgegaan worden. In deze figuur kunnen de resultaten van de verschillende basisopties niet met moderne wetenschappen vergeleken worden. Dat gebeurt wel in de blauwe kolom naast de figuur. In deze kolom wordt aangeduid welke basisopties significant betere (+) wiskundeprestaties hebben neergezet dan moderne wetenschappen (de referentiecategorie) en welke het significant minder goed (-) doen.

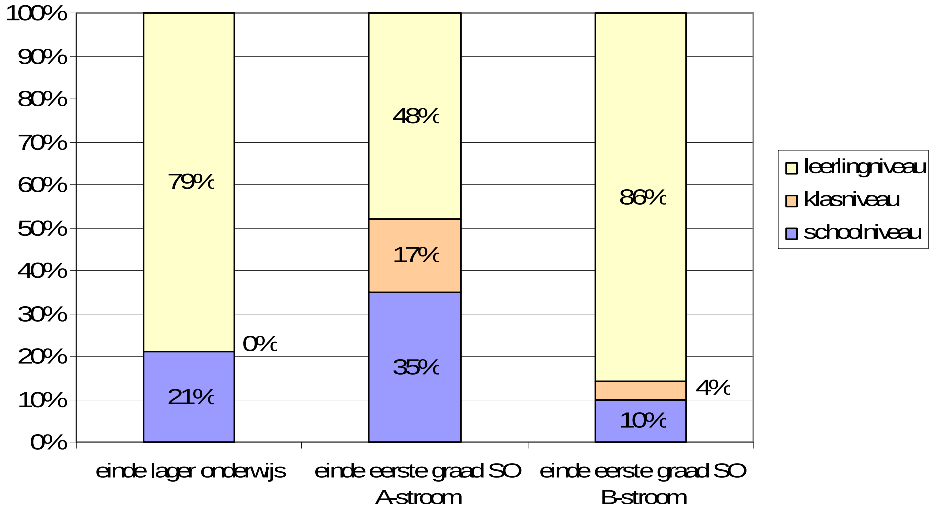


Figuur 6.6 Onderlinge vergelijking tussen de wiskundeprestaties per basisoptie

Waarmee hangen prestatieverschillen in de A-stroom samen?

Scholen verschillen onderling in de gemiddelde wiskundeprestaties van hun leerlingen uit het tweede leerjaar van de eerste graad: 35% van de prestatieverschillen tussen leerlingen hangen samen met de school waar ze naartoe gaan. Ook klassen binnen scholen verschillen onderling, zij het in mindere mate.

Deze klasverschillen omvatten 17% van de prestatieverschillen tussen leerlingen voor wiskunde. Het grootste deel van de prestatieverschillen (48%) is toe te schrijven aan verschillen tussen de leerlingen zelf. In vergelijking met het basisonderwijs worden in de A-stroom van de eerste graad meer verschillen tussen scholen en tussen klassen binnen scholen vastgesteld (Figuur 6.7).



Figuur 6.7 Mate waarin de verschillen in prestaties in de peilingen wiskunde toe te schrijven zijn aan verschillen tussen scholen, klassen en leerlingen. Voor het lager onderwijs worden in deze figuur enkel de resultaten voor het domein meten en meetkunde weergegeven. Bij de overige domeinen is de verdeling echter gelijkaardig.

Bepaalde schoolloopbaanaspecten hangen samen met betere wiskundeprestaties. De verwachte positie aan het einde van het secundair onderwijs en de verwachte studiekeuze na het secundair onderwijs, hangen samen met de prestaties op de wiskundepeiling. Leerlingen van wie de leerkracht verwacht dat ze in het kso of aso zullen afstuderen, halen gemiddeld hogere wiskundescores dan leerlingen van wie de leerkracht verwacht dat ze zonder diploma het secundair onderwijs zullen verlaten. Leerlingen waarvan de leerkracht vermoedt dat ze in het tso of bso zullen afstuderen, presteren niet significant verschillend van leerlingen van wie leerkrachten vermoeden dat ze ongekwalificeerd zullen uitstromen. Ook de leerlingen van wie de leerkracht verwacht dat ze na het secundair onderwijs een korte specialisatie zullen aanvatten of een professionele of academische bachelor, doen het over het algemeen beter voor wiskunde dan de leerlingen van wie de leerkracht verwacht dat ze geen verdere studie zullen aanvatten na het secundair onderwijs.

Peilingsresultaten in de B-stroom

Een aantal leerlingen in de eerste graad van het gewoon secundair onderwijs volgt een apart programma: de B-stroom. Zij hebben aangepaste ontwikkelingsdoelen, waarvan een groot deel overeenkomt met eindtermen van het basisonderwijs. Toch zijn hun resultaten voor de peiling niet zo goed, ook niet in vergelijking met de peilingsresultaten in het basisonderwijs. Voor ‘omtrek, oppervlakte en inhoud’ haalt in BVL bijvoorbeeld 34% van de leerlingen de ontwikkelingdoelen, terwijl op het einde van de lagere school 60% van de leerlingen gelijkaardige eindtermen beheersen.

Waarmee hangen prestatieverschillen in de B-stroom samen?

Tien procent van de prestatieverschillen tussen leerlingen hangt samen met de school waar ze naartoe gaan. De klasverschillen omvatten 4% van de prestatieverschillen tussen leerlingen voor wiskunde. Het grootste deel van de prestatieverschillen (86%) is toe te schrijven aan verschillen tussen de leerlingen zelf. In vergelijking met de peiling in de A-stroom, zijn er in de B-stroom minder verschillen tussen klassen en scholen. Mogelijk heeft dit te maken met het feit dat het om een zeer specifieke groep leerlingen gaat (BVL-leerlingen), terwijl bij de peiling in de A-stroom leerlingen uit een brede waaier van basisopties in de steekproef werden opgenomen. Anderzijds zijn de verschillen tussen leerlingen, klassen en scholen in de B-stroom blijkbaar meer vergelijkbaar met de verschillen die vastgesteld worden in het basisonderwijs (Figuur 6.7) dan met de verschillen in de A-stroom. Dit zou erop kunnen wijzen dat er in de A-stroom van de eerste graad grotere verschillen zijn in het wiskundeonderwijs naargelang de basisoptie. Mogelijk zijn er –ondanks de gemeenschappelijke eindtermen voor de basisvorming in de A-stroom - in werkelijkheid meer verschillen in het wiskundecurriculum in de A-stroom (verschillend curriculum per basisoptie en ook verschillen tussen scholen) dan in het basisonderwijs en de B-stroom.

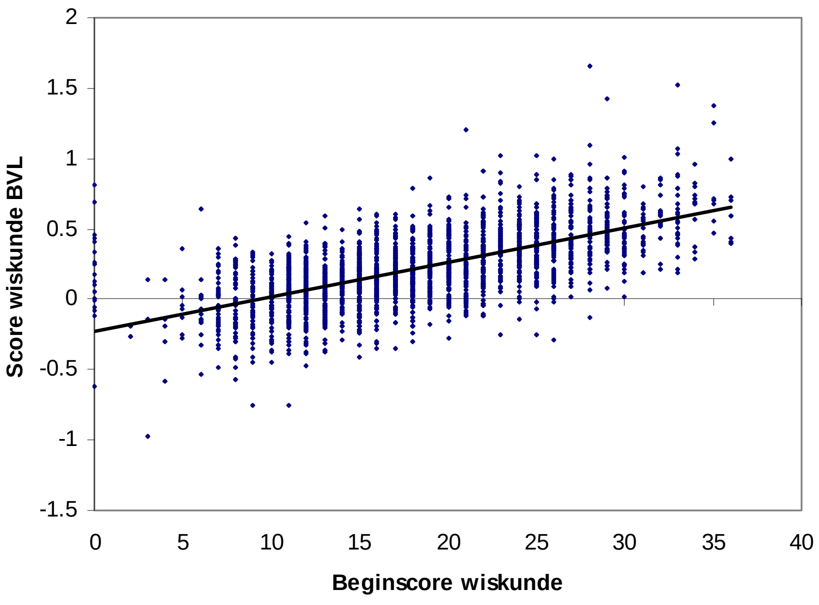
Sommige schoolloopbaankenmerken van leerlingen hangen samenhangen met betere of minder goede wiskundeprestaties in de B-stroom. BVL-leerlingen die kleuteronderwijs volgden, of die het getuigschrift basisonderwijs behaalden op het einde van het lager onderwijs presteren beter op de peilingstoetsen. BVL-Leerlingen die in het buitenland school hebben gelopen, die tijdens hun loopbaan in het basisonderwijs hebben gedubbeld, de speelleerklas of het buitengewoon onderwijs hebben gevolgd presteren gemiddeld minder goed voor wiskunde. BVL-leerlingen die zijn blijven zitten in het lager onderwijs presteren minder goed. BVL-Leerlingen die een jaar overdeden in de eerste graad secundair onderwijs doen het dan weer beter. Wellicht zijn het vooral de BVL-leerlingen die afkomstig zijn uit de A-stroom en in de loop van de eerste graad zijn overgegaan naar de B-stroom die voor dit positief effect van zittenblijven in het secundair onderwijs verantwoordelijk zijn. De BVL-leerlingen die het voorgaande schooljaar in de A-stroom zaten presteren immers ook gemiddeld beter dan de normaalvorderende BVL-leerlingen die het jaar voordien in 1B zaten.

Verschillen tussen leerlingen in leerwinst in de B-stroom

Het jaar dat vooraf ging aan de peiling wiskunde in de B-stroom werd een vooronderzoek gedaan naar de beginsituatie van de leerlingen in de B-stroom. Van de leerlingen die het schooljaar vóór de peiling in dezelfde school in 1B zaten, zijn ook de scores op deze begintoets wiskunde en Nederlands bekend.

In Figuur 6.8 wordt de samenhang tussen de scores op de begintoets wiskunde en op de peilingstoets wiskunde visueel weergegeven. Op de horizontale as is de score op de begintoets af te lezen. Op de verticale as is de score op de peilingstoets af te lezen. Deze score wordt weergegeven door de positie op de meettoets.

De samenhang is positief: leerlingen met een lagere score op de begintoets wiskunde in 1B hebben doorgaans ook een lagere score op de peilingstoets, leerlingen met een hogere score op de begintoets hebben doorgaans ook een hogere score op de peilingstoets op het einde van het BVL.
De samenhang tussen de begintoets Nederlands en de peilingstoets wiskunde is vergelijkbaar.



Figuur 6.8 Samenhang tussen de beginscore wiskunde in 1B en de wiskundescore op de peiling in het BVL

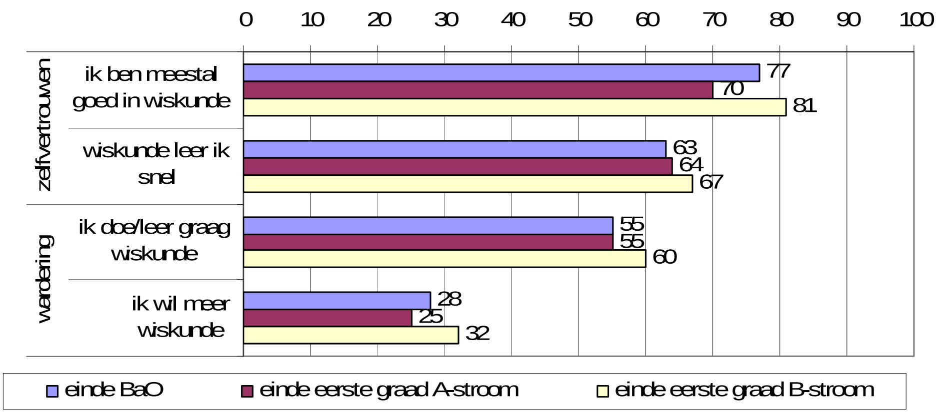
Tabel 6.1 biedt een overzicht van de kenmerken die een effect hadden op de leerwinst. De leerlingen die vorig jaar in 1B zaten en die in het BVL minstens 2 jaar schoolse vertraging hebben, presteren gemiddeld lager op de wiskundepeiling dan men zou kunnen verwachten op basis van hun scores op de begintoetsen. Het gaat hier om 4% van de leerlingen in de deelgroep van voormalige 1B-leerlingen. Ook de 1% leerlingen met een verstandelijke handicap scoren gemiddeld genomen lager op de peilingstoets dan verwacht. Beide leerlinggroepen hinken aan het einde van BVL dus meer achterop dan medeleerlingen die bij het begin van 1B hetzelfde niveau haalden voor wiskunde en Nederlands. De 26% leerlingen uit 1B die aangeven thuis tussen de 26 en de 100 boeken te hebben, behalen daarentegen wel leerwinst. Leerlingen met een hoger cultureel kapitaal thuis scoren dus hoger dan men kan verwachten op basis van enkel hun beginscores.

Tabel 6.1 Overzicht van de leerlingkenmerken die een effect hadden op de leerwinst van de leerlingen die het voorafgaand schooljaar in dezelfde school in 1B zaten

Leerlingkenmerk	**Effect**
Leerling zit 2 of meer jaar achter op leeftijd	**-**
Leerling heeft tussen de 26 en 100 boeken thuis	**+**
Leerling heeft een verstandelijke handicap	**-**

1.7 Waardering voor wiskunde

In elke wiskundepeiling werden aan de leerlingen vragen gesteld over hun zelfvertrouwen op het vlak van wiskunde en hun attitude ten opzichte van wiskunde. In Figuur 6.9 worden voor enkele vergelijkbare vragen uit de 3 peilingen de resultaten weergegeven. Globaal genomen is de waardering voor wiskunde zowel in het basisonderwijs als in de A- en de B-stroom van de eerste graad eerder positief. Ook het zelfvertrouwen voor het leren van wiskunde is eerder positief. Leerlingen uit de B-stroom zijn voor deze stellingen blijkbaar positiever dan leerlingen uit het basisonderwijs of de A-stroom.



Figuur 6.9 Percentage leerlingen op het einde van het basisonderwijs en de eerste graad dat vertrouwen heeft in zijn wiskundige bekwaamheid en wiskunde waardeert

In de drie wiskundepeilingen werd vastgesteld dat leerlingen die zichzelf als vaardig inschatten voor wiskunde en leerlingen met een positieve attitude ten aanzien van wiskunde betere resultaten halen dan leerlingen bij wie dit minder het geval is.

In de wiskundepeilingen voor het basisonderwijs en de A-stroom van de eerste graad werd aan de leerlingen gevraagd wat hun motivatie was om naar school te gaan, naar de wiskundeleerkracht te luisteren of hun wiskundehuiswerk te maken. In beide peilingen geven de meeste leerlingen aan dat ze dit doen omdat ze er zelf voor kiezen. De tweede meest voorkomende motivatie is omdat ze ervaren dat anderen dat van hen verwachten. Leerlingen die niet weten waarom ze naar school gaan, naar hun wiskundeleerkracht luisteren of hun wiskundehuiswerk maken, en leerlingen die dit vooral doen omdat anderen dit van hen verwachten, presteren minder goed op de wiskundepeilingen in het basisonderwijs en de A-stroom van de eerste graad dan leerlingen bij wie dit minder het geval is. Daartegenover halen leerlingen die als motivatie aangeven dat ze het leuk vinden, of dat ze er zelf voor kiezen gemiddeld hogere wiskundescores dan leerlingen die hieruit minder hun motivatie putten.

1.8 De rol van de leerkracht

In de wiskundepeilingen vroegen de onderzoekers aan de leerlingen hoe vaak ze bepaalde activiteiten doen tijdens de lessen wiskunde. Er zijn activiteiten die in elke peiling samenhangen met een betere score van de leerlingen: leerlingen die zeggen dat ze in de lessen wiskunde vaak zelf problemen oplossen en vraagstukjes maken, of leerlingen die zeggen vaak optellingen, aftrekkingen etc. te oefenen zonder rekenmachine, presteren in alle wiskundepeilingen beter dan leerlingen die aangeven dat ze dit minder frequent doen.

Met een grootschalig onderzoek zoals een peiling is het heel moeilijk om eenduidige effecten te vinden van werkvormen of lesactiviteiten. In een peiling kan informatie over de klaspraktijk immers enkel verzameld worden via achtergrondvragenlijsten voor leerlingen en leerkrachten. We moeten bij de interpretatie van deze resultaten rekening houden met het feit dat het hier gaat om percepties. Zo presteren leerlingen uit de eerste graad (A- en B-stroom) die aangeven dat ze in de les vaak aan hun huiswerk van wiskunde mogen beginnen, significant beter dan leerlingen die dit minder vaak doen. Misschien zijn het vooral de sterkere leerlingen die in de klas aan hun huiswerk mogen beginnen als ze vlugger klaar zijn met hun wiskunde-oefeningen dan hun klasgenoten.

De bevraagde activiteiten hebben in de verschillende peilingen niet altijd een effect, of niet altijd een effect in dezelfde richting. Leerlingen in de A-stroom die zeggen dat ze tijdens de wiskundelessen vaak mogen samenwerken in kleine groepjes, zetten betere resultaten neer op de wiskundetoetsen dan leerlingen die aangeven dat ze dit minder frequent doen. In het basisonderwijs en de B-stroom zien we echter het omgekeerde. Daar doen leerlingen die naar eigen zeggen vaak in groepjes werken het net minder goed.

Leerlingen in de A-stroom en het basisonderwijs die zeggen dat ze vaak uitleg mogen geven bij hun antwoorden, presteren beter dan leerlingen die dit minder vaak doen. In de B-stroom werd voor deze activiteit dan weer geen effect gevonden.

2 Reflectie over de resultaten door AKOV

Net als in de Vlaamse peilingen wordt ook bij internationale prestatiemetingen nagegaan in welke mate er prestatieverschillen zijn tussen leerlingen. Kansengelijkheid wordt ook internationaal beschouwd als een indicator van kwaliteitsvol onderwijs. Daarom wordt in TIMSS en PISA ook onderzocht of er grote prestatieverschillen zijn tussen de zwak en sterk presterende leerlingen. Een hoge gemiddelde score van een onderwijssysteem is een goed resultaat, maar hoge scores van de topgroep gaan best niet ten koste van de zwakkere leerlingen.

Verschillen tussen sterke en zwakke leerlingen in TIMSS 2003

De spreiding van de Vlaamse resultaten bij TIMSS 2003 toont aan dat het percentage Vlaamse jongeren dat ondermaats presteert voor wiskunde, zeer beperkt is en veel lager ligt dan het internationale gemiddelde (Van den Broeck e.a., 2004). Het verschil tussen de Vlaamse en de internationale prestaties lijkt wel groter in het basisonderwijs dan in het secundair onderwijs (Tabel 6.2). De Vlaamse voorsprong lijkt te verkleinen tussen het vierde leerjaar basisonderwijs en het tweede leerjaar secundair onderwijs. Dit komt doordat in Vlaanderen minder leerlingen in de eerste graad secundair onderwijs een bepaalde standaard halen dan in het basisonderwijs. Internationaal gebeurt eerder de omgekeerde beweging daar halen bijvoorbeeld meer leerlingen in het secundair onderwijs de tussenliggende of de lage standaard dan in het basisonderwijs. Is dit een afspiegeling van de tendens die ook bij de wiskundepeilingen in het basisonderwijs en secundair onderwijs zichtbaar is?

Tabel 6.2 Percentage leerlingen dat de vier internationale standaarden haalt

Internationale standaarden	Lager onderwijs (4de leerjaar)		Secundair onderwijs	
	Vlaanderen	Internationaal	Vlaanderen	Internationaal
gevorderd	10%	8%	9%	7%
hoog	51%	33%	47%	33%
tussenliggend	90%	64%	82%	76%
laag	99%	84%	95%	94%

Verschillen tussen sterke en zwakke leerlingen in PISA

In 2003 was Vlaanderen volgens het PISA-onderzoek wereldkampioen wiskunde. De gemiddelde score van 15-jarigen was nergens zo hoog als in Vlaanderen. Keerzijde van de medaille is wel dat er ook een grote prestatiekloof tussen de sterkste en de zwakste leerlingen wordt vastgesteld.

Bij de resultaten van PISA 2006 en 2009 is de kloof tussen de hoogst en laagst presterende leerlingen voor wiskundige geletterdheid kleiner dan in PISA 2003 (De Meyer & Warlop, 2010). Dat lijkt vooral te komen doordat minder leerlingen zeer hoog scoren in 2006 en 2009, wat zich uit in een significant lagere gemiddelde score dan in 2003. In 2009 was de Vlaamse gemiddelde score ook lager dan in 2006, maar dit verschil is niet significant (Tabel 6.3).

Tabel 6.3 Evolutie wiskundige geletterdheid in Vlaanderen volgens PISA. Tussen haakjes wordt de standaardfout vermeld

	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009
gemiddelde score	529	520	515
gemiddelde score bij percentiel 10	380,7 (4,6)	408,9 (8,8)	401,5 (4,6)
gemiddelde score bij percentiel 90	664,4 (2,4)	663,2 (3,3)	662,8 (3,7)
percentage laagpresteerders (onder niveau 2)	12%	12%	14%
percentage hoogpresteerders (niveau 5 of hoger)	34%	29%	26%

Significant lager dan in 2009 Significant hoger dan in 2009

Hoewel het aantal laagpresterende leerlingen voor wiskunde doorheen de jaren ongeveer gelijk bleef, is hun gemiddelde score voor wiskundige geletterdheid wel significant verbeterd ten opzichte van 2003. Voor de best presterende leerlingen geldt dat hun aantal is afgenomen, maar dat hun gemiddelde wiskundescore over de jaren heen nagenoeg gelijk is gebleven.

In dit deel wordt gezocht naar de factoren die zowel in de Vlaamse peilingen als in internationaal onderzoek blijken samen te hangen met prestatieverschillen.

2.1 Taal

Eerst bespreken we de invloed van thuistaal op de wiskundeprestaties in internationale onderzoeken zoals TIMSS en PISA. Vervolgens belichten we de invloed van thuistaal op schoolloopbanen van leerlingen. Daarna gaan we na of anderstalige leerlingen minder problemen hebben met minder talige wiskundeopgaven. En tot slot zoomen we in op twee Nederlandse onderzoeken over de invloed van taalvaardigheid bij realistisch rekenonderwijs en over het leren en onderwijzen van wiskunde bij allochtone leerlingen.

2.1.1 Effect van thuistaal op de scores in TIMSS 2003

TIMSS 2003 geeft aan dat leerlingen die thuis (bijna) altijd dezelfde taal spreken als op school, gemiddeld hogere scores halen dan leerlingen die dat niet doen. In Vlaanderen spreekt 84% van de basisschoolleerlingen die deelnamen aan TIMSS thuis dezelfde taal als op school, in de eerste graad secundair onderwijs is dat 86% van de leerlingen (Van den Broeck, e.a., 2004).

2.1.2 Effect van thuistaal en afkomst in Vlaanderen volgens PISA 2003

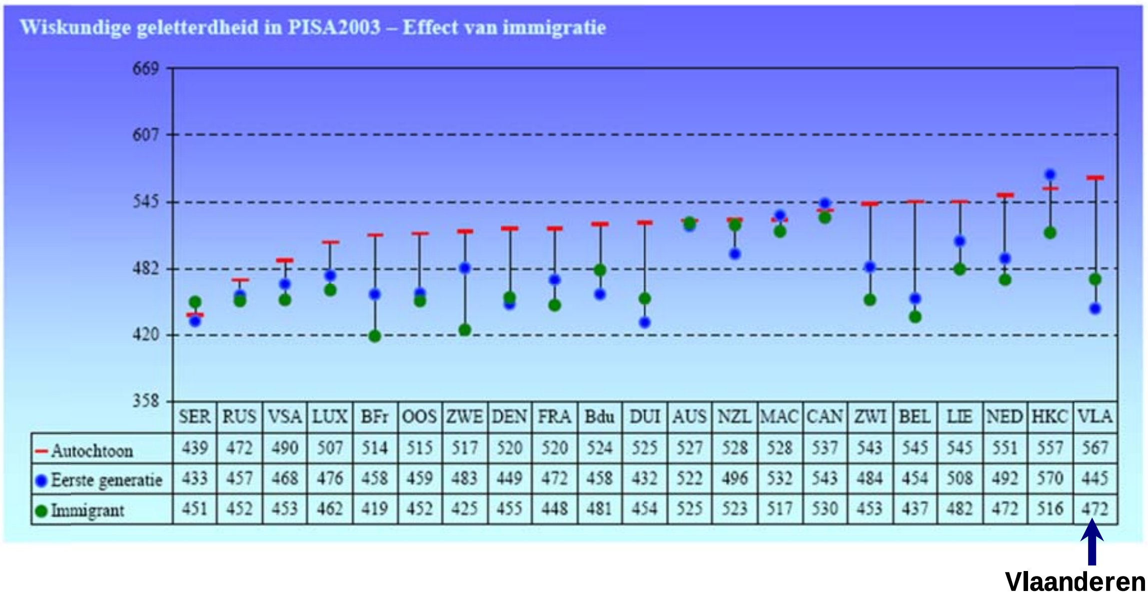
Invloed van afkomst op PISA-resultaten

De invloed van de thuistaal en de afkomst op de prestaties voor wiskunde wordt bevestigd in PISA 2003 (De Meyer e.a., 2004). Op basis van het land van geboorte van de leerlingen en hun ouders worden de deelnemers opgedeeld in 3 categorieën: autochtone leerlingen, eerste-generatieleerlingen en immigratieleerlingen (Tabel 6.4).

Tabel 6.4 Indeling van de leerlingen op basis van hun afkomst bij PISA 2003

Autochtone leerlingen	Leerlingen geboren in het land van de testafname en minstens één van hun beide ouders ook.
Eerste-generatieleerlingen	Leerlingen geboren in het land van de testafname, maar met ouders die in een ander land zijn geboren.
Leerlingen uit geïmmigreerde gezinnen	Leerlingen niet geboren in het land van de testafname, van wie beide ouders ook in een ander land zijn geboren.

In de meeste landen scoren autochtone leerlingen significant beter dan andere leerlingen. Het verschil tussen autochtone leerlingen en eerste-generatieleerlingen is nergens zo groot als in Vlaanderen (Figuur 6.10). In Vlaanderen scoren leerlingen uit geïmmigreerde gezinnen iets beter in Vlaanderen dan eerste-generatieleerlingen. Volgens het PISA-rapport komt dit door de groep leerlingen uit de categorie van de geïmmigreerde gezinnen die thuis Nederlands spreekt. Het gaat hier zeer waarschijnlijk om Nederlandse leerlingen die al dan niet in België wonen en in Vlaanderen onderwijs volgen.



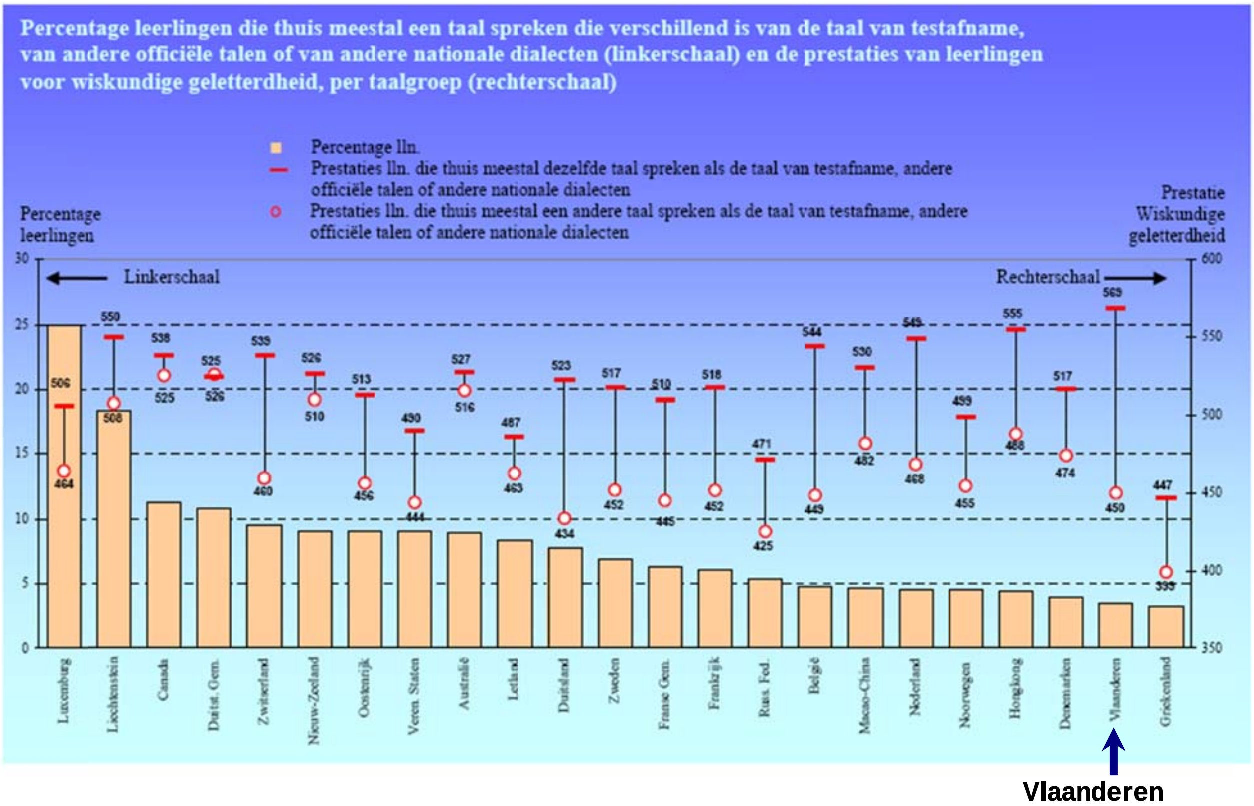
	SER	RUS	VSA	LUX	BFr	OOS	ZWE	DEN	FRA	Bdu	DUI	AUS	NZL	MAC	CAN	ZWI	BEL	LIE	NED	HKC	VLA
Autochtoon	439	472	490	507	514	515	517	520	520	524	525	527	528	528	537	543	545	545	551	557	567
Eerste generatie	433	457	468	476	458	459	483	449	472	458	432	522	496	532	543	484	454	508	492	570	445
Immigrant	451	452	453	462	419	452	425	455	448	481	454	525	523	517	530	453	437	482	472	516	472

Figuur 6.10 Effect van immigratie op wiskundige geletterdheid

Invloed van thuistaal op PISA-resultaten

Op het vlak van de thuistaal maakt PISA een onderscheid tussen twee groepen van leerlingen. De eerste groep bestaat uit de leerlingen die thuis meestal dezelfde taal spreken als de taal van de testafname, een andere officiële landstaal of een nationaal dialect. Voor Vlaanderen zijn dat dus de leerlingen die thuis meestal Nederlands, Frans, Duits of een Vlaams dialect spreken. Tot de tweede groep behoren de leerlingen die thuis een andere taal spreken. Figuur 6.11 laat zien dat ongeveer 3% van de 15-jarige leerlingen in Vlaanderen tot deze groep behoort. Door de keuze die de PISA-onderzoekers maken, wordt het aantal anderstaligen in Vlaanderen echter duidelijk onderschat.

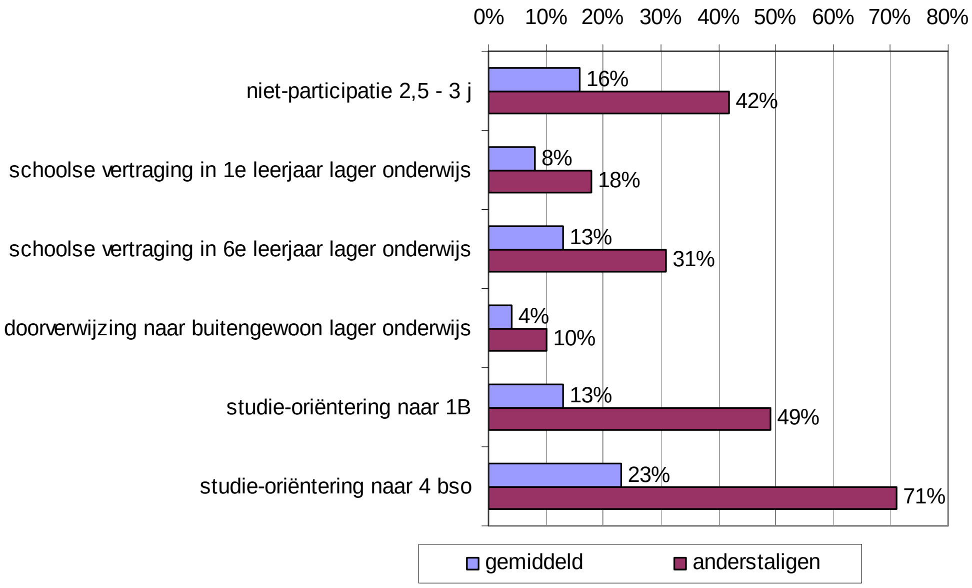
Het prestatieverschil tussen beide groepen is van alle deelnemende landen aan PISA 2003 het grootst in Vlaanderen. Het rapport geeft als verklaring hiervoor de uitzonderlijk hoge prestaties van de Vlaamse leerlingen in het algemeen. De gemiddelde score van de leerlingen die thuis een vreemde taal spreken is in Vlaanderen (gemiddelde score van 450) niet statistisch significant beter of slechter dan de vergelijkbare groep leerlingen in de buurlanden. Het is echter best mogelijk dat de kloof tussen de leerlingen die de schooltaal spreken en de anderstalige leerlingen wordt over- of onderschat omdat ook Franstaligen en Duitstaligen in de Vlaamse PISA-resultaten niet beschouwd worden als anderstalingen.



Figuur 6.11 Prestatieverschillen tussen leerlingen met een nationale taal en een vreemde taal

2.1.3 Invloed van thuistaal op schoolloopbaan

Het Cijferboek sociale ongelijkheid in het Vlaamse onderwijs (Groenez, Nicaise en De Rick, 2009) geeft een overzicht van de invloed van verschillende factoren op de schoolcarrière van leerlingen. Het Cijferboek baseert zich hiervoor op gegevens van 7 654 leerlingen die van het schooljaar 1991-1992 tot en met het schooljaar 1998-1999 verzameld werden. In Figuur 6.12 worden een aantal keuzes in de schoolloopbaan gelinkt aan de thuistaal van de leerlingen. Inzake thuistaal maken Groenez e.a. een onderscheid tussen gezinnen waar enkel Nederlands gesproken wordt, gezinnen waar Nederlands samen met een andere taal gesproken wordt en gezinnen waarin de Turkse, een Maghrebijnse of een Arabische taal wordt gesproken. Onder anderstaligen verstaan ze leerlingen uit gezinnen waarin de Turkse, een Maghrebijnse of een Arabische taal wordt gesproken, al dan niet in combinatie met Nederlands.



Figuur 6.12 Invloed van de thuistaal op studieloopbaan

De anderstalige leerlingen uit de populatie stappen vaak later het kleuteronderwijs in dan de gemiddelde leerling. Schoolse vertraging in het eerste leerjaar lager onderwijs komt dubbel zo veel voor bij anderstalige leerlingen als bij de doorsnee leerlingen en op het einde van het lager onderwijs is dat verschil nog groter. Eén op tien anderstalige kinderen wordt doorverwezen naar het buitengewoon lager onderwijs, wat meer dan het dubbel is van het gemiddelde. Bijna de helft van de anderstalige leerlingen komt terecht in 1B, wat vier keer meer is dan normaal. Meer dan 70% van de anderstalige leerlingen zit in 4 bso, drie keer zo veel als bij de gemiddelde leerling. De keuze voor een bepaalde onderwijsvorm heeft dus niet enkel met talent en interesse te maken.

Volgens Groenez e.a. (2009) suggereren verschillende analyses dat migrantenkinderen in het basisonderwijs eerder wegens hun sociaal-economische positie achtergesteld geraken dan wegens hun thuistaal of culturele verschillen. In het secundair onderwijs is de nationaliteit bij geboorte wel een bijkomende verklaring voor ongelijkheid.

2.1.4 Kale sommen versus contextvragen

In Vlaanderen toetst OVSG jaarlijks een grote groep leerlingen in het zesde leerjaar van het basisonderwijs. Voor wiskunde stond in 2010 hoofdrekenen centraal. Leerkrachten gaven in het verleden telkens aan dat leerlingen met een andere thuistaal dan het Nederlands gehinderd werden bij het lezen van de toetsopgaven. Om de invloed van thuistaal te onderzoeken, besloot OVSG om in 2010 een toets hoofdrekenen te ontwerpen waarbij 14 van de 16 opgaven ‘kale sommen’ waren. Bij deze kale sommen moesten de leerlingen dus geen tekst lezen. OVSG stelde echter vast dat anderstalige leerlingen zelfs voor de kale sommen minder goed presteerden dan Nederlandstalige leerlingen. Leerlingen met een andere thuistaal maken dus niet enkel slechtere wiskundetoetsen als ze erbij moeten lezen, het lijkt erop dat ze ook minder wiskunde hebben kunnen leren omdat de schooltaal verschilde van de thuistaal.

Van Nijlen (2010) onderzocht onder meer of BVL-leerlingen in de peiling wiskunde beter presteren op contextvragen dan op kale vragen. Hij komt tot de opmerkelijke conclusie dat leerlingen die bij aanvang van hun secundair onderwijs minder goed lezen vaak minder problemen hebben om een contextvraag uit de peiling correct op te lossen dan om een kale opgave correct op te lossen. De talige component in de contextvragen blijkt voor deze leerlingen geen extra drempel te zijn.

2.1.5 Taalgericht vakonderwijs

AKOV organiseerde in 2009 al een conferentie na de peiling wiskunde in de B-stroom van de eerste graad van het secundair onderwijs. In de conferentiemap werd ook verwezen naar twee Nederlandse onderzoeken over taal in wiskunde (AKOV, 2009). We geven hieronder kort de krachtlijnen van deze onderzoeken.

Taalvaardigheid en tekstbegrip bij wiskundetaken

Prenger (2005, 2007) onderzocht in welke mate taalvaardigheid en tekstbegrip een rol spelen in het realistisch rekenonderwijs. Daarbij ontwikkelde ze een instrument om bij Nederlandse leerlingen in het tweede jaar voortgezet (secundair) onderwijs het begrip van schoolboekteksten en van wiskundeteksten te onderzoeken. Dit gebeurde aan de hand van drie soorten toetsen: een toets voor begrip van schooltaalwoorden (microniveau), een toets voor het tekstbegrip op het alineaniveau (mesoniveau) en een toets voor algemeen tekstbegrip van schoolboekteksten (alle niveaus) gebruikt. Voor het vaststellen van het begrip van wiskundeteksten is een toets voor wiskundewoorden (microniveau) en een toets voor algemene begripvaardigheid van wiskundeteksten gebruikt (alle niveaus).

Voor de onderzochte leerlingen in Nederland concludeerde Prenger dat de allochtone leerlingen significant lager presteerden dan de autochtone leerlingen voor tekstbegrip bij wiskunde, voor tekstbegrip op het alineaniveau, voor de kennis van schooltaalwoorden en de kennis van wiskundewoorden. De prestatieverschillen tussen allochtonen en autochtonen zijn het grootst bij de toetsen over schooltaalwoorden en over wiskundewoorden.

Allochtone leerlingen hebben een duidelijke achterstand als het gaat om specifiek wiskundig tekstbegrip, terwijl er geen duidelijke achterstand wordt vastgesteld bij het algemene schooltekstbegrip. Als verklaring voor deze vaststelling verwijst Prenger (2005, 2007) naar een onderzoek van Hacquebord (1989) waarin wordt gesteld dat allochtone leerlingen hun gebrek aan schoolwoordkennis kunnen compenseren door vaardigheden op het macroniveau van de tekst.

Omdat allochtone leerlingen bij 'tekstbegrip wiskunde' wel significant lager scoren dan autochtone leerlingen, concludeert Prenger dat allochtone leerlingen bij 'tekstbegrip wiskunde' hun gebrek aan vaardigheid op het woordniveau niet kunnen compenseren. Prenger stelt dat dit wellicht te verklaren is omdat wiskundeteksten anders zijn dan de algemene schoolboekteksten. De korte wiskundeteksten, waarbij elk woord belangrijk is en alle zinnen met elkaar in verband moeten worden gebracht, bieden misschien minder gelegenheid tot compensatie van het gebrek aan woordkennis, waardoor de invloed van de lage woordkennis meer doorwerkt in het begrip van de wiskundeteksten.

In een tweede deelonderzoek belichtte Prenger (2006) ook enkele talige struikelblokken die te vinden zijn in wiskundeboeken.

Het leren en onderwijzen van wiskunde bij allochtone leerlingen

In een ander Nederlands onderzoek werd aangetoond dat niet alleen de taal in wiskundeboeken maar ook de interactie tussen de leraar en de leerlingen een rol speelt bij het leren en onderwijzen van wiskunde.

van den Boer (2003) bestudeerde het leergedrag van de allochtone leerlingen tijdens de wiskundeles en het onderwijsgedrag van de leerkracht om een zicht te krijgen op de mechanismen die de onderwijsachterstand van allochtone leerlingen verklaren. Ze komt tot drie kerngedachten, die duidelijk maken welke mechanismen in de klas spelen, en die zo gezamenlijk een verklaring vormen voor de achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen.

- Allochtone leerlingen gaan ervan uit dat tekstproblemen niet belangrijk zijn. Het belangrijkste doel voor de leerlingen is het vinden van een antwoord op een som. Zij ontwikkelen daarom strategieën om zich niet te bekommeren om onbekende tekst. Het feit dat ook de leerkrachten de neiging hebben om contextopgaven snel te decontextualiseren tot het wiskundesommetje dat erin verstopt zit, versterkt deze strategie van de leerlingen.
- Allochtone leerlingen voelen zich niet gestimuleerd tot het stellen van vragen en indien zij wel vragen stellen, voelen zij zich niet gestimuleerd om deze vragen te verhelderen. Veelal neemt de

leerkracht de rol van uitlegger op zich, en de allochtone leerlingen nemen een volgende rol aan. Bovendien hebben de allochtone leerlingen strategieën om om te gaan met onbekende woorden in de tekst (negeren, nog eens lezen, gokken, afleiden uit de context). Wanneer de allochtone leerlingen het gevoel hebben dat zij uiteindelijk tot het juiste antwoord kunnen komen, zullen zij geen vragen stellen.

- Moeilijkheden van allochtone leerlingen blijven onzichtbaar. Zoals hiervoor is gezegd voelen de allochtone leerlingen zich niet gestimuleerd tot het stellen van vragen. De leerkracht verwacht echter dat de leerlingen vragen zullen stellen wanneer iets onduidelijk is. Geen vragen, heeft dus tot gevolg dat er verder geen aandacht aan wordt besteed. De allochtone leerlingen formuleren hun vragen, antwoorden of tussenkomsten over het algemeen in korte, of slechts halve zinnen. De docenten vertonen vervolgens accomodatiegedrag naar hun allochtone leerlingen. De leerlingen worden niet gestimuleerd om precies te formuleren wat ze bedoelen. Daarbij worden de allochtone leerlingen enerzijds beperkt om zelf actief de wiskundetaal te ontwikkelen, anderzijds is er het gevaar dat de allochtone leerling iets anders bedoelt dan wat de docent `hoort'. Tenslotte blijken allochtone leerlingen weinig op te schrijven. Zeker probeersels laten ze meer dan autochtone leerlingen achterwege. Dit alles leidt ertoe dat moeilijkheden van allochtone leerlingen niet aan het licht komen.

2.2 Sociaal-economische situatie en cultureel kapitaal

Op basis van onderzoek gebruikt de Vlaamse overheid het opleidingsniveau van de moeder als indicator voor de sociaal-economische situatie van de het gezin waarin een leerling opgroeit. De overheid gaat ervan uit dat het opleidingsniveau van de moeder staat voor het geheel aan kennis, vaardigheden en attitudes van mensen, voor het cultureel kapitaal waartoe de scholing bijdraagt. Ze beschouwt het als eens sterke indicator van de culturele bagage waarmee de leerlingen naar school komen, en van de mate waarin de cultuur van thuis aansluit bij de schoolcultuur.

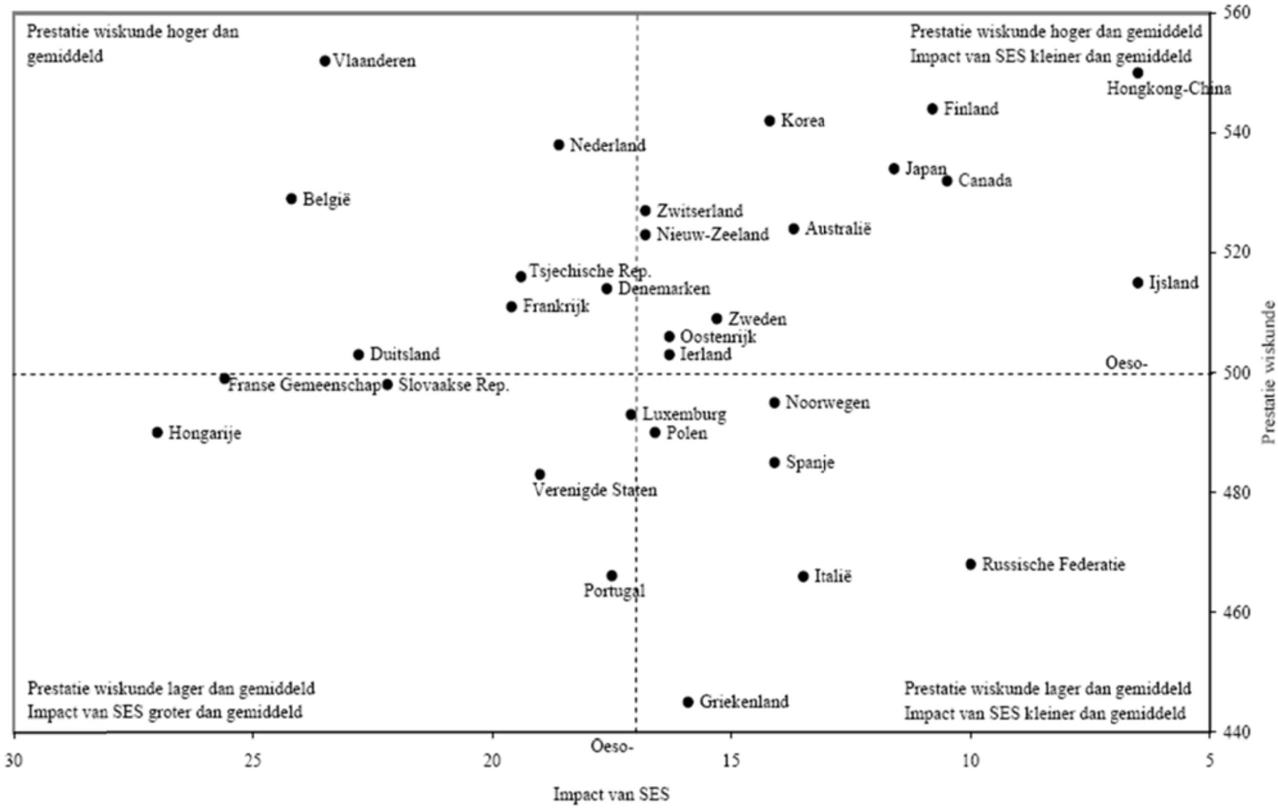
Achtereenvolgens wordt hieronder ingegaan op de effecten van sociaal-economische achtergrond die in TIMSS en PISA werden vastgesteld en het HIVA-onderzoek naar de impact van de thuissituatie op de schoolloopbaan. Tot slot wordt een praktijkvoorbeeld uit de Verenigde Staten belicht.

2.2.1 Effect van sociaal-economische achtergrond volgens TIMSS 2003

In TIMSS 2003 werd bekeken wat de invloed is van de sociaal-economische achtergrond van de leerlingen op hun prestaties. Volgende aspecten werden hierbij opgenomen: het opleidingsniveau van de ouders en het thuis kunnen beschikken over een computer, boeken of een studeertafel. Al deze aspecten hebben een positieve invloed op de scores van leerlingen. Dit is een tendens die zowel in Vlaanderen als internationaal te zien is.

2.2.2 Effect van sociaal-economische thuissituatie in Vlaanderen volgens PISA

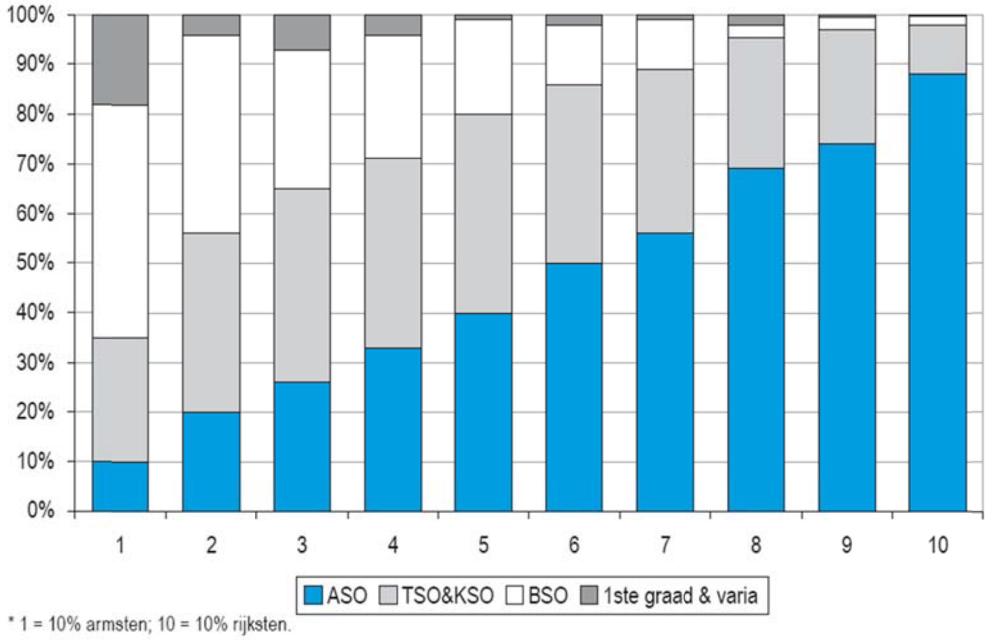
PISA onderzocht ook de impact van SES op de prestaties van leerlingen. Daarbij werd rekening gehouden met de volgende kenmerken: het beroep van de ouders, het onderwijsniveau van de ouders, de educatieve middelen waarover de leerlingen thuis beschikken en het aantal boeken bij de leerlingen thuis. In geen enkel ander deelnemend land of regio was de impact van SES zo groot als in Vlaanderen (Figuur 6.13). Vlaamse leerlingen uit gezinnen met een lage SES presteerden gemiddeld wel significant hoger dan leerlingen uit vergelijkbare gezinnen in de OESO-landen.



Figuur 6.13 Prestatie voor wiskundige geletterdheid en de impact van sociaal-economische achtergrond, PISA 2003

2.2.3 Invloed van welvaart van het gezin op studiekeuze

Hirtt, Nicaise en De Zutter (2007) voerden verdere analyses uit op de databank van het PISA 2003. Ze deelden de Vlaamse jongeren uit deze databank op in welvaartsdecielen. Van de 10% armste jongeren blijkt slechts 1 op 10 door te stromen naar het aso, terwijl dat voor de 10% rijkste jongeren 9 op 10 is. Hoe rijker de ouders, hoe groter de kans dat jongeren naar het aso doorstromen en hoe kleiner de kans dat ze in het bso terecht komen. De welvaart thuis speelt volgens het onderzoek van Hirtt e.a. dus een grote rol in de studiekeuze (Figuur 6.14).



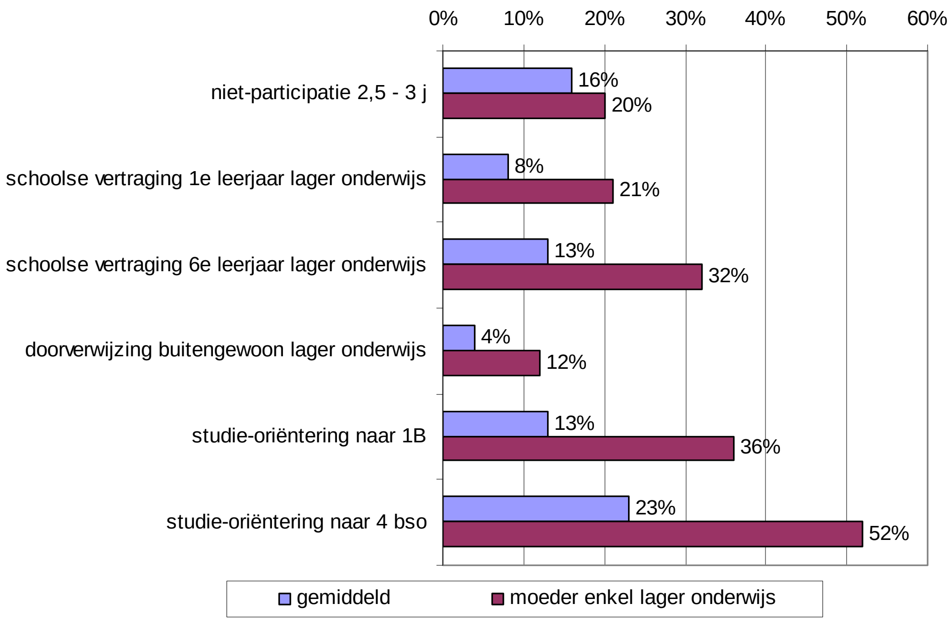
Figuur 6.14 Studieoriëntering naar onderwijsvorm per welvaartsdeciel

2.2.4 Invloed van de sociaal-economische thuissituatie op de schoolloopbaan

Hirtt e.a. (2007) bestudeerden het aandeel van kinderen uit meer en minder welvarende gezinnen in de onderwijsvormen van het secundair onderwijs. De keuze voor een onderwijsvorm wordt in het Vlaamse onderwijs gemaakt op het einde van de eerste graad, en deze keuze lijkt niet altijd te gebeuren op basis van aanleg. Groenez, Nicaise en De Rick (2009) argumenteren op basis van hun onderzoek dat het belang van de thuissituatie toeneemt in de loop van de onderwijsloopbaan.

Kinderen die geen kleuteronderwijs volgen, zittenblijven, doorverwezen worden naar buitengewoon lager onderwijs, een oriëntatie krijgen naar de B-stroom en bso zijn volgens Groenez e.a. kenmerken van een problematische schoolloopbaan. Het opleidingsniveau van de moeder wordt hier ook gebruikt als indicator voor de sociaal-economische situatie van het gezin waarin de leerling opgroeit. De gebruikte cijfers komen uit het Cijferboek sociale ongelijkheid in het Vlaamse onderwijs (Groenez e.a. 2009).

In Figuur 6.15 is te zien hoe kinderen van een moeder die enkel lager onderwijs volgde, oververtegenwoordigd zijn in bepaalde groepen. Uit deze figuur blijkt ook hoe het aandeel van kinderen van een moeder met enkel lager onderwijs in deze groepen toeneemt met de leeftijd van de kinderen. Volgens Groenez e.a. heeft onderzoek herhaaldelijk aangetoond dat het opleidingsniveau van de ouders, en meer bepaald dat van de moeder, in Vlaanderen de belangrijkste voorspeller is van het schoolsucces van jongeren, en dit op alle niveaus van de onderwijsloopbaan.



Figuur 6.15 Vertegenwoordiging van kinderen met laaggeschoolde moeder bij probleemkenmerken in de schoolloopbaan

2.2.5 Een praktijkvoorbeeld uit de Verenigde Staten: 'Knowledge is power program' (KIPP)

KIPP is een omvangrijk programma in de Verenigde Staten om kinderen uit kansarme gezinnen betere kansen te geven dan zij in het gewone onderwijssysteem krijgen. De leerkrachten, de ouders en de leerlingen gaan een partnerschap aan om onderwijs voorop te plaatsen. De populatie van de KIPP-scholen wordt gekenmerkt door een hoge concentratie van leerlingen met een ongunstige sociaal-economische thuissituatie en leerlingen met een Afrikaanse of Latino achtergrond. Dit zijn de groepen die traditioneel lage scores behalen op nationale examens en op internationale peilingen. Er zijn momenteel 99 KIPP-scholen: 24 lagere scholen (kleuters tot vierde leerjaar), 60 middenscholen en 15 secundaire scholen (tot 16 jaar) met in totaal meer dan 27 000 leerlingen.

Het KIPP-model benadrukt persoonlijke verantwoordelijkheid, hard werk en lange dagen voor leerlingen en leerkrachten. De schooldag loopt van half 8 's morgens tot 5 uur 's avonds. Ouders moeten ervoor zorgen dat hun kind naar school komt, en moeten achter de keuze voor de KIPP school staan. In de Verenigde Staten hebben arme mensen vaak meer dan één job; omdat het grootste deel van de leerlingen uit arme en kansarme gezinnen komt, verwachten de scholen niet dat ouders deelnemen aan schoolse activiteiten.

Dit programma biedt leerlingen de kans om uit te stijgen boven hun achtergrond, de scholen zijn gratis. Kansarmen zien in deze scholen soms de enige kans op een toegang tot hoger onderwijs voor hun kinderen.

Misschien biedt KIPP aan kansarme kinderen wat andere kinderen thuis ook krijgen. Kinderen uit gunstige sociaal-economische milieus leren thuis heel veel: de ouders redeneren met hun kinderen, nemen hen mee op educatieve uitstapjes, zorgen voor leerrijk speelgoed. Naast de gevulde boekenkast zijn dit aspecten van het cultureel kapitaal in het gezin van de leerling, die ook een gunstige invloed hebben op de schoolse prestaties van de kinderen.

Op het einde van de lagere school presteren 84% van de KIPP leerlingen boven het nationale gemiddelde voor wiskunde. Het succes van KIPP is zeker het meest opvallend in wiskunde; andere leergebieden worden ook aangeboden, maar niet met hetzelfde indrukwekkende succes.

Recent deden Clark Tuttle, Teh, Nichols-Barrer, Gill & Gleason (2010) een wetenschappelijke studie naar de kenmerken en resultaten van de leerlingen in 22 KIPP-middenscholen.

Hieronder geven we enkele opvallende resultaten uit dit wetenschappelijk rapport:

- leerlingen in de KIPP scholen zijn niet meer getalenteerd dan leerlingen in andere scholen in de buurt;
- KIPP-scholen hebben een positief en statistisch significant effect op de prestaties van de leerlingen;
- academische winsten zijn in veel KIPP-scholen voldoende groot om traditionele prestatieverschillen tussen leerlingen van verschillende etnische oorsprong en verschillende inkomensgroepen substantieel te verminderen;
- de meeste KIPP-scholen hebben geen hogere cijfers van vroegtijdig schoolverlaten dan gewone scholen uit dezelfde buurt.

Om het effect van de KIPP-middenscholen na te gaan, keken Clark Tuttle e.a. na uit welke basisscholen de KIPP-scholen gerecruteerd hadden. De controlegroep bestond uit leerlingen die schoolliepen in dezelfde basisscholen en die tot op het einde van de basisschool vergelijkbaar waren met de onderzochte leerlingen in de KIPP-scholen. In 18 van de 22 KIPP-scholen is het effect significant positief.

In Vlaanderen zijn er altijd significante verschillen tussen resultaten van kinderen met een gunstige en een ongunstige sociaal-economische situatie in nationale en internationale peilingen. Het is één van de opmerkingen die steeds de goede resultaten van de Vlaamse internationale goede scores nuanceren, de invloed van SES is in Vlaanderen veel groter dan in andere onderwijssystemen. De onderzoekers van de KIPP-scholen vonden geen significante verschillen tussen leerlingen van verschillende groepen: jongens en meisjes, leerlingen met Latino of Afrikaanse achtergrond.

KIPP is een initiatief van twee geëngageerde leraren: zij stichtten in 1994 in Houston en South Bronx de eerste twee KIPP-scholen. De scholen werken met zeer zware selecties en zeer zware trainingen voor schoolleiders. Aanvankelijk waren alle resultaten van de scholen spectaculair succesvol en alle verhalen over de scholen positief. Het programma groeide en met de schaalvergroting, kwamen ook minder positieve getuigenissen. Er zijn verhalen over scholen die leerlingen uitsluiten omdat hun prestaties ondermaats bleven, verhalen over plaatsingstoetsen (KIPP werkt met homogene klasgroepen) die gezien worden als ingangsexamens. Het is niet duidelijk of die gevoed worden door ontevreden ouders van leerlingen, of jaloerse omstaanders. Het geeft aan dat er geen kant en klare recepten zijn voor onderwijsverbetering. Welke de (lange) weg is die bewandeld moet worden om structureel en op nationaal niveau verbetering te bereiken, is met dit programma niet aangetoond. Het is wel duidelijk dat KIPP-scholen erin slagen om het verschil te maken voor de leerlingen die er afstuderen, zonder te recruteren op talent van de leerlingen die binnenkomen.

2.3 GOK-concentratiegraad van de school

In de drie wiskundepeilingen werd vastgesteld dat de leerlingen (ook de leerlingen die niet aan de GOK-criteria beantwoorden) gemiddeld lager presteren voor wiskunde naarmate de concentratiegraad van GOK-leerlingen in een school (en dus niet enkel in de deelnemende klassen) hoger is. Agirdag, Van Houtte en Van Avermaet (2011) stellen ook vast dat vooral de sociaal-economische achtergrond van het leerlingenpubliek in een school een bijkomende rol speelt bovenop de sociaal-economische situatie van de leerling zelf. In hun bijdrage aan deze conferentiemap lichten Agirdag en Van Houtte (verder in dit hoofdstuk) hun onderzoek toe en zoeken ze naar verklaringen voor deze prestatieverschillen tussen scholen met meer of minder GOK-leerlingen.

2.4 Leermoeilijkheden

Leerlingen met een diagnose voor dyscalculie presteren in elke wiskundepeiling gemiddeld minder goed dan leerlingen zonder leermoeilijkheden. Leerlingen met dyslexie zetten in de wiskundepeilingen gemiddeld ook minder goede scores neer, behalve in de B-stroom waar leerlingen met dyslexie het net beter doen.

Dyslexie

Op de conferentie na de peiling wiskunde in de B-stroom zochten deelnemers naar verklaringen voor de significant betere resultaten van leerlingen met dyslexie in de B-stroom van het secundair onderwijs. Sommige deelnemers verwezen naar de compensatiestrategieën die deze leerlingen verworven hebben. Dankzij de gepaste ondersteuning en begeleiding hebben leerlingen met dyslexie geleerd om gestructureerd te werken en om een goede werkhouding aan te nemen (Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, 2009).

Dyscalculie

Mensen met dyscalculie hebben een probleem met rekenen. Niet iedereen met rekenproblemen heeft dyscalculie. Dyscalculie is een leerstoornis die gekenmerkt wordt door een achterstand in wiskunde (leerlingen behoren tot de 10% zwakste leerlingen bij rekenen), die hardnekkig is (een kind kan maar een etiket ‘dyscalculie’ krijgen na 6 maanden hard oefenen) en die niet door andere oorzaken kan verklaard worden. Dyscalculie hindert leerlingen in hun schoolse parcours, maar is ook daarna en daarbuiten hinderlijk in het dagelijkse leven. Er bestaat geen consensus over de oorzaak ervan, wel zijn deskundigen het eens over de drie voornoemde criteria om dyscalculie te beschrijven.

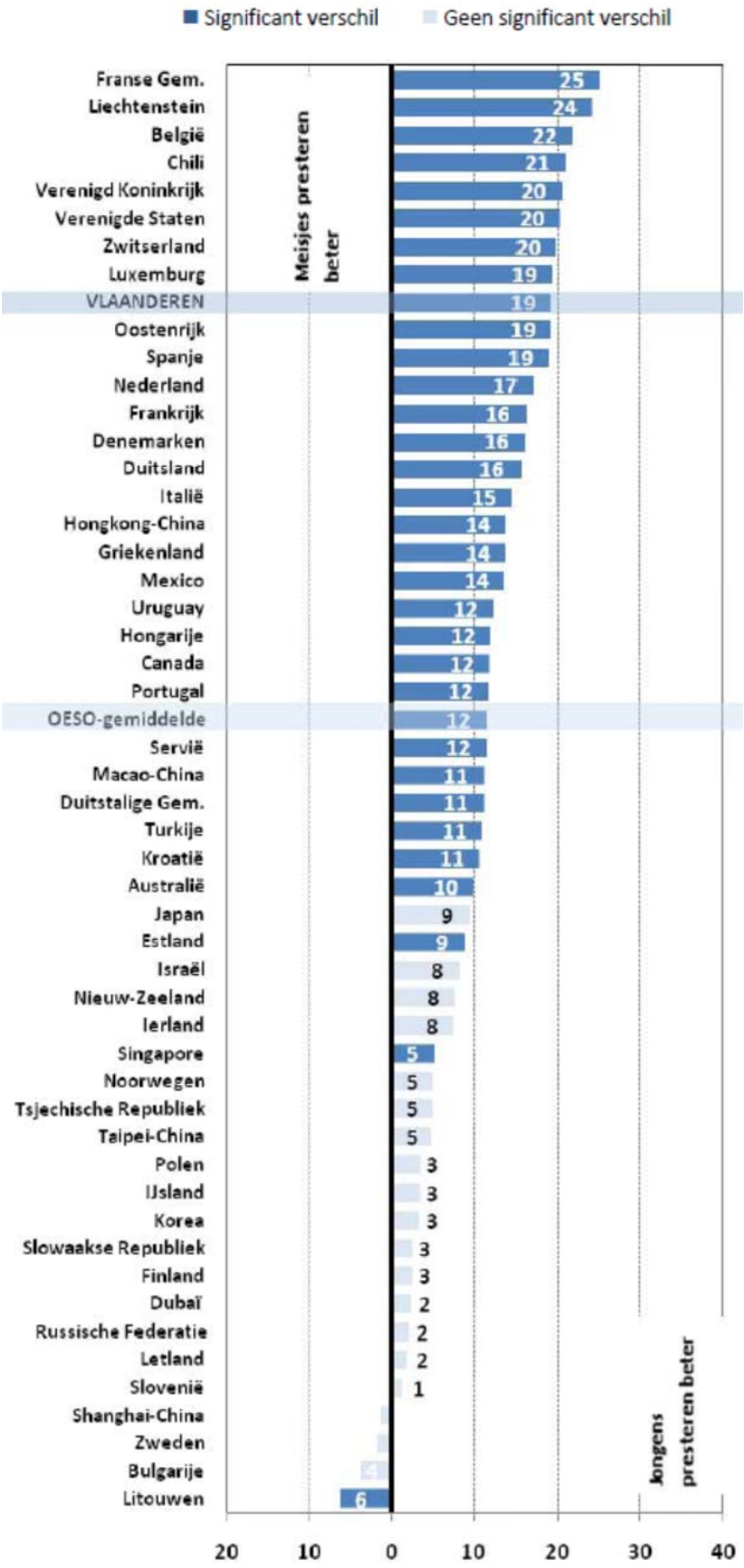
In Vlaanderen komt dyscalculie voor bij 5% van de bevolking, dat is vergelijkbaar met het percentage dat aan dyslexie lijdt. In de drie peilingen rapporteren opvallend minder dan 5% van de ouders een diagnose van dyscalculie: in het basisonderwijs is dat 2,2%; in het secundair onderwijs 3,7% in de B-stroom van de eerste graad en 1,2% in de A-stroom. Dyscalculie is heel wat minder bekend dan dyslexie. De diagnose voor dyscalculie kan pas gesteld worden na het kleuteronderwijs: ze wordt meestal gesteld in het midden van de lagere school, maar er bestaan testen die ook in het secundair of hoger onderwijs de diagnose mogelijk maken. In tegenstelling tot veel andere ontwikkelingsstoornissen, komt dyscalculie een beetje meer voor bij meisjes dan bij jongens.

Deskundigen op het vlak van dyscalculie (bijvoorbeeld Prof. Desoete, Ugent, 2010) vinden het nodig om voor deze leerlingen in de klas aangepaste hulpmiddelen te voorzien. De geschikte hulpmiddelen hangen af van het specifieke probleem waarmee de leerlingen kampen, en zijn niet voor alle leerlingen met dyscalculie dezelfde. Bij de peilingen zijn de testcondities voor alle leerlingen dezelfde. Daarom kunnen leerlingen die in de klas aangepaste maatregelen krijgen, deze in de peilingstoets niet krijgen. Het is belangrijk dat een peilingsafname gestandaardiseerd gebeurt: alleen op deze manier kan de eventuele samenhang en effectgrootte van leermoeilijkheden met leerlingprestaties worden gemeten.

2.5 Jongens - meisjes

In PISA 2009 onderzoek werd vastgesteld dat jongens internationaal gemiddeld beter presteren voor wiskundige geletterdheid dan meisjes. Dit bevestigt de verschillen die in de Vlaamse wiskundepeilingen tussen jongens en meisjes werden vastgesteld. Maar in vergelijking met andere landen is het verschil tussen jongens en meisjes voor wiskundige geletterdheid in Vlaanderen wel een van de grootste van de deelnemende landen (Figuur 6.16). Finland slaagt erin om erg goede wiskunderesultaten neer te zetten zonder een significante prestatieverschillen tussen jongens en meisjes. In de Vlaamse peiling van biologie behaalden jongens betere resultaten dan meisjes, maar deze trend is internationaal niet algemeen voor wetenschappelijke geletterdheid.

Ook in TIMSS 2003 bleken Vlaamse jongens van het tweede leerjaar van de eerste graad secundair onderwijs het duidelijk beter te doen voor wiskunde en wetenschappen dan meisjes. Internationaal werd in TIMSS toen geen significant verschil tussen jongens en meisjes vastgesteld voor wiskunde, maar voor wetenschappen deden de jongens het internationaal ook beter dan meisjes. In het vierde leerjaar lager onderwijs werden in TIMSS 2003 dan weer geen verschillen tussen jongens en meisjes vastgesteld. Dit geldt zowel voor Vlaanderen als internationaal.



Figuur 6.16 Verschil in prestaties tussen jongens en meisjes voor wiskundige geletterdheid in PISA 2009

Voor leesvaardigheid scoren meisjes internationaal gemiddeld beter dan jongens in PISA 2009. Dit verschil wordt ook gevonden in de Vlaamse peilingen over de eindtermen Nederlands en Frans in het basisonderwijs. In PIRLS 2006, een internationaal onderzoek naar leesvaardigheid in het vierde leerjaar lager onderwijs, bleken in Vlaanderen en de meeste andere landen de meisjes voor leesvaardigheid beter te presteren dan de jongens. De verschillen tussen meisjes en jongens zijn in Vlaanderen niet zo groot als in sommige andere landen (Van Damme, 2007).

2.6 Waardering voor wiskunde

Net als in de Vlaamse wiskundepeilingen werd ook bij TIMSS 2003 voor het secundair onderwijs vast vastgesteld dat leerlingen met een hoog zelfvertrouwen in wiskunde en leerlingen die wiskunde waarderen hogere wiskundescores halen. In de TIMSS steekproef voor het secundair onderwijs heeft bijna de helft (45%) van de Vlaamse leerlingen een hoog zelfvertrouwen voor wiskunde, een kwart heeft een laag zelfvertrouwen voor wiskunde. Bijna een kwart heeft ook een lage waardering voor wiskunde, terwijl 29% een hoge waardering heeft. In Nederland zijn er minder leerlingen met een hoge waardering (16%).

Op basis van de databanken van TIMSS onderzochten Boe, May en Boruch (2002) onderzochten de samenhang tussen de motivatie van leerlingen en hun prestaties in TIMSS 1995. Als motivatie-indicator gebruikten de onderzoekers het aantal vragen dat de leerlingen invulden in de (erg lange) achtergrondvragenlijst: dit geeft volgens de onderzoekers de volharding van de leerlingen aan. Ze vonden dat er een statistisch relevante samenhang is tussen de nationale gemiddelde prestaties voor wiskunde en wetenschappen en het gemiddeld aantal vragen dat leerlingen in dat land op de achtergrondvragenlijst invullen. Boe e.a. concluderen dat onderwijssystemen die erin slagen een hoge prestatiemotivatie bij de leerlingen te ontwikkelen, beter presteren in TIMSS dan landen waarin leerlingen minder gemotiveerd zijn.

In de Vlaamse wiskundepeilingen bleek vooral de aard van de motivatie samen te hangen met verschillen in wiskundeprestaties. Leerlingen met een meer instrinsieke motivatie voor school en wiskunde presteerden gemiddeld beter, terwijl leerlingen die een meer extrinsieke motivatie aanhaalden of aangaven dat helemaal niet gemotiveerd waren, gemiddeld minder goede wiskundescores hadden.

2.7 De rol van de leerkracht

Leerkrachten en scholen vragen zich ongetwijfeld af hoe ze ervoor kunnen zorgen dat hun leerlingen beter presteren. Moeten we de leerlingen anders groeperen? Zijn bepaalde werkvormen of didactische principes effectiever dan andere? Op basis van nationale peilingen en internationale onderzoeken is het echter niet eenvoudig om te detecteren welke proceskenmerken bijdragen tot betere leerlingprestaties. Zo wilden Wössmann en West (2002) onderzoeken of de verschillen in klasgrootte konden verklaren waarom bepaalde landen beter presteerden in TIMSS dan andere landen. Kiezen de beter presterende landen voor kleinere klassen? Wössmann en West concludeerden op basis van hun onderzoek echter dat de klasgrootte niet eenduidig samenhangt met verschillen in leerlingenprestaties.

In de drie wiskundepeilingen vinden de onderzoekers dat leerlingen die vaker zelf vraagstukken of problemen oplossen tijdens de wiskundelessen het beter doen dan leerlingen die dat minder doen. Hieruit lijkt het redelijk om te besluiten dat het zinvol is om leerlingen regelmatig zelf problemen te laten oplossen in de klas. Er zijn echter weinig bevraagde activiteiten van wiskundelessen die hetzelfde effect hebben in het basisonderwijs, en de A- en B-stroom van het secundair onderwijs. Bijvoorbeeld: leerlingen die naar eigen zeggen vaak in kleine groepjes samenwerken tijdens de wiskundelessen doen het in de B-stroom en het basisonderwijs slechter dan leerlingen die zeggen dat ze dit minder vaak doen, terwijl deze activiteit in de A-stroom samenhangt met betere peilingsresultaten. In een school die in de eerste graad de A- en de B-stroom aanbiedt, gaat een leerkracht soms van de ene klas rechtstreeks naar de andere klas. Uit de peilingsresultaten blijkt dat een goede wiskunde-activiteit voor de ene groep leerlingen dat niet is voor de andere groep. Het bevestigt wel de bevinding van de Nederlandse KNAW-commissie dat er veel onderzoek bestaat over het wiskundig leren en denken van kinderen en de verbetering van het rekenonderwijs maar dat er opmerkelijk weinig literatuur is die toelaat om eenduidige conclusies te trekken over de relatie tussen rekendidactiek en rekenvaardigheid. In

Nederland heeft de ‘Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen’ (KNAW) in 2008 de commissie ‘Rekenonderwijs op de basisschool’ geïnstalleerd om “*in kaart te brengen wat er bekend is over de relatie tussen rekendidactiek en rekenvaardigheid op grond van bestaande wetenschappelijke inzichten en empirisch feitenmateriaal*”. De KNAW-commissie heeft onder meer een overzichtsstudie verricht op basis van empirisch onderzoek dat de laatste 20 jaar in Nederland is verricht en op basis van een beknopte inventarisatie van buitenlands onderzoek. Eén van de hoofdconclusies van de KNAW-commissie is dat er geen overtuigende empirische ondersteuning is voor de stelling dat er een verschil is tussen het effect van de traditionele en de realistische rekendidactiek op de rekenvaardigheid. De invloed van de leraar op de leerlingprestaties blijkt groter te zijn dan die van de gebruikte rekendidactiek. De specifieke uitwerking van de didactiek door de leraar en de interactie tussen leraar en leerling spelen blijkbaar een grotere rol dan algemene vakdidactische principes.

Het onderzoek over het rekenonderwijs op de basisschool werd gedaan omdat in Nederland, meer dan in Vlaanderen, de aanhangers van ‘traditionele’ en ‘realistische’ rekendidactiek een verhit debat voerden. De commissie concludeert daarbij ook dat in Nederland de bezorgdheid over de rekenvaardigheid van de leerlingen in de basisschool terecht is, en dat de sleutel tot verbetering van de rekenvaardigheid van deze leerlingen ligt in het niveau van de leraar. De Nederlandse onderwijsminister Marja van Bijsterveldt heeft aan de Nederlandse Onderwijsraad advies gevraagd over het ‘Actieplan Beter Presteren’ waarmee ze in 2011 wil starten. Met dit plan wil ze tot betere prestaties van de leerlingen komen. In het plan wil de Nederlandse onderwijsminister in de basisscholen taal en rekenen centraal stellen, maar ook de lerarenopleiding komt aan bod.

2.7.1 Het rapport van Barber en Mourshed (McKinsey & Company)

Ook volgens Barber en Mourshed hangt de kwaliteit van het onderwijs in grote mate af van de kwaliteit van de leerkrachten. In september 2007 publiceerden zij in opdracht van McKinsey & Company een rapport over onderwijssystemen. Zij onderzochten hiervoor 25 onderwijssystemen uit de hele wereld, waaronder 10 van de landen met de beste prestaties op onderwijsvlak. Ervaringen van deze toplanden tonen volgens Barber en Mourshed aan dat een goed onderwijssysteem, met een hoog niveau én een grote sociale gelijkheid, tegen een redelijke kostprijs kan uitgebouwd worden. Om goede leerresultaten bij alle leerlingen na te streven, moeten volgens de auteurs van het rapport drie voorwaarden ingevuld worden: de juiste personen moeten leerkracht worden, leerkrachten moeten zich blijvend ontwikkelen tot efficiënte lesgevers en het onderwijssysteem moet het beste onderwijs voor elk kind nastreven. Hieronder wordt kort omschreven hoe volgens Barber en Mourshed aan deze drie voorwaarden gewerkt kan worden.

De juiste personen worden leerkracht

Barber en Mourshed pleiten voor een strenge selectie van kandidaten vóór aanvang van de opleiding. Finland recruteert haar kandidaat-leerkrachten bijvoorbeeld uit de beste 10% leerlingen, Singapore en Hong Kong uit de beste 30% leerlingen en aspirant-leerkrachten basisonderwijs in Zuid-Korea moeten zelfs tot de top 5% van hun jaar behoren. Volgens Barber en Mourshed kan een vrije toegang tot de opleiding leiden tot een overvloed aan kandidaten, wat een negatief effect heeft op de kwaliteit.

De opleiding zelf moet gericht zijn op de ontwikkeling van processen om geschikte leraren te selecteren. In Singapore en Finland bijvoorbeeld ligt in de opleiding de nadruk op communicatievaardigheden, op motivatie om les te geven, maar ook op academische prestaties zoals gecijferdheid, geletterdheid en probleemoplossende vaardigheden. Elke leerkracht in Finland moet ook de graad van master behaald hebben. Het startsalaris van een leerkracht moet goed, maar niet overdreven hoog zijn. Deze maatregelen vergroten de status van de leraar, dit leidt volgens het rapport opnieuw tot een toestroom van kwaliteitsvolle kandidaten.

Leerkrachten ontwikkelen zich tijdens hun carrière

Tijdens zijn carrière moet een leerkracht constant naar een verbetering van zijn lessen streven. Dit is immers dé manier om betere leerresultaten te bereiken. Professionele ontwikkeling is hierbij volgens

Barber en Mourshed essentieel. In Singapore bijvoorbeeld volgt elke leerkracht per jaar 100 uur betaalde navorming. Het reflecteren over het eigen presteren en het samenwerken met en leren van collega's zijn ook essentiële elementen in een professionele ontwikkeling. In sommige landen gebeurt dat georganiseerd, bijvoorbeeld door ervaren mentoren aan te stellen, door systematisch elkaars lessen te volgen en goed lesmateriaal te verspreiden over de hele school (Japan) of door leerkrachten van eenzelfde school een halve dag per week samen hun lesstrategieën te laten ontwikkelen (Finland).

Het beste onderwijs voor elk kind

Volgens Barber en Mourshed moeten landen in hun streven naar het beste onderwijs voor elk kind, ook voor elk kind hoge doelen formuleren. Zo heeft iedere leerling toegang tot excellent onderwijs. De scores van de beste landen bij PISA 2003 (met de focus op wiskundige geletterdheid) vertonen een lage correlatie tussen de resultaten van een leerling en zijn thuissituatie, wat aangeeft dat leerlingen die hun onderwijsloopbaan met een leerachterstand starten omwille van sociaal-economische redenen, deze achterstand inhalen. Twee aspecten spelen daarbij volgens de auteurs een rol. Allereerst focust een succesvol onderwijssysteem in de aanvangsjaren op gecijferdheid en geletterdheid. Onderzoek geeft immers aan dat de mate waarin leerlingen gecijferd en geletterd zijn op 7-jarige leeftijd, sterk gerelateerd is met hun toekomstige leerresultaten. Verder wordt er volgens Barber en Mourshed in een kwaliteitsvol onderwijssysteem snel ingegrepen van zodra een leerling een leerachterstand dreigt op te lopen. In Finland bijvoorbeeld is er voor leerlingen tot 15 jaar per 7 gewone leraren één speciaal opgeleide leerkracht. Die werkt risicoleerlingen bij, individueel of in kleine groepjes. 30% van alle leerlingen krijgt op deze manier ondersteuning. Vooral wiskunde en Fins komen hierbij aan bod. Deze manier van differentiëren werkt niet stigmatiserend omdat een hoog percentage leerlingen er gebruik van maakt. Bovendien worden soms ook de beste leerlingen apart genomen, waardoor leerlingen dit niet associëren met onderpresteren. In Singapore blijven leraren na de lesuren nog wat op school om problemen van leerlingen te remediëren. Bovendien krijgen de 20% laagst presterende leerlingen in het begin van het lager onderwijs extra lessen.

2.7.2 Het TALIS-onderzoek van de OESO

Barber en Mourshed vinden professionele ontwikkeling essentieel om betere leerresultaten te bereiken. Het is daarom interessant om de mate van professionalisering bij Vlaamse leerkrachten eens te belichten.

De OESO organiseerde in 2007-2008 een internationaal onderzoek bij schoolleiders en leerkrachten die les geven in de eerste graad van het gewoon secundair onderwijs uit 24 landen (Deneire, e.a., 2009). In Vlaanderen namen 203 scholen en ruim 3500 leerkrachten deel aan de *Teaching and Learning International Survey* (TALIS). In deze vragenlijsten werd onder andere gepeild naar de professionele ontwikkeling van leerkrachten van de eerste graad. Daarbij werd vastgesteld dat de meeste Vlaamse leerkrachten zich wel engageren op vlak van professionele ontwikkeling (meer dan het internationaal TALIS-gemiddelde), maar uitgedrukt in tijdsbesteding of volume blijkt dit eerder weinig te zijn (lager dan het TALIS-gemiddelde, en enkel in Ierland besteden leerkrachten hieraan minder tijd dan in Vlaanderen).

Bovendien blijken Vlaamse leerkrachten algemeen genomen een geringe behoefte te hebben aan (meer) professionele ontwikkeling. Vlaamse leerkrachten besteden in vergelijking met leerkrachten uit andere landen weinig tijd aan professionaliseringsactiviteiten en hebben ook geen behoefte aan meer professionele ontwikkeling. Mogelijk heeft dit te maken met het feit dat ze vinden dat de professionaliseringsactiviteiten weinig opleveren. De gepercipieerde impact van professinaliseringsactiviteiten is in geen enkel ander Europees TALIS-land significant lager dan in Vlaanderen.

2.8 Schoolloopbanen

2.8.1 Schoolse vertraging

In sommige onderwijssystemen kiest men ervoor om leerlingen te groeperen volgens leeftijd en is het niet mogelijk om een jaar over te doen. De leerlingen blijven dus bij eenzelfde groep ongeacht hun schoolse prestaties. Andere systemen kiezen er eerder voor om leerlingen te groeperen volgens hun gemiddelde vaardigheid waarbij zittenblijven wordt gehanteerd wanneer leerlingen bepaalde doelen niet halen. In Vlaanderen is er geen officiële richtljin over het groeperen van leerlingen in het basisonderwijs. De meeste basisscholen kiezen voor een leerstof-jaarklassensysteem. In sommige basisscholen probeert men meer flexibel te groeperen en laat men leerlingen voor een of meer leergebieden bij een groep van jongere of oudere kinderen aansluiten (bijvoorbeeld werken met niveaugroepen). Hoewel de school autonoom mag beslissen over de indeling van haar leerlingen in klassen, wordt deze beslissing meestal genomen in overleg met de ouders. In het secundair onderwijs beslist de delibererende klassenraad op het einde van het schooljaar over het attest van elke leerling. De mogelijke beslissingen van de klassenraad zijn bekend: A-attest, B-attest, C-attest.

Uit de peiling blijkt dat op het einde van het basisonderwijs ongeveer 13% van de kinderen achter zit op leeftijd, op het einde van de A-stroom van de eerste graad is dat 17% en bij de B-stroom 58%. Uit het Statistisch Jaarboek van het Vlaams onderwijs voor het schooljaar 2008-2009 (Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2009) blijkt dat in de derde graad van het secundair onderwijs gemiddeld 35% van de leerlingen een of meer jaren schoolse vertraging heeft opgelopen. Er zijn daarbij aanzienlijke verschillen tussen de onderwijsvormen (Tabel 6.5). Bij deze cijfers moeten we ook vermelden dat de leerlingen die het onderwijs verlaten vóór ze de derde graad bereiken hier niet zijn meegeteld.

Tabel 6.5 Percentage leerlingen dat achterzit op leeftijd in de derde graad secondair onderwijs

	Schoolse vertraging
3e graad aso	15%
3e graad bso	59%
3e graad kso	46%
3e graad tso	41%
Totaal 3e graad so	35%

De leerlingen die één of meerdere jaren schoolse vertraging opliepen, hebben een kleinere kans op succes in de peilingstoetsen. Net als in de Vlaamse peilingen, stelt men ook in de Nederlandse Periodieke Peilingen van het Onderwijsniveau (PPON) vast dat leerlingen in het primair onderwijs die schoolse vertraging opliepen minder goed presteren dan leerlingen die op leeftijd zitten (Janssen, van der Schoot & Hemker, 2005). Het effect van schoolse vertraging is in Nederland sinds 1997 ongeveer even groot gebleven. In Vlaanderen kunnen we die vergelijking nog niet maken.

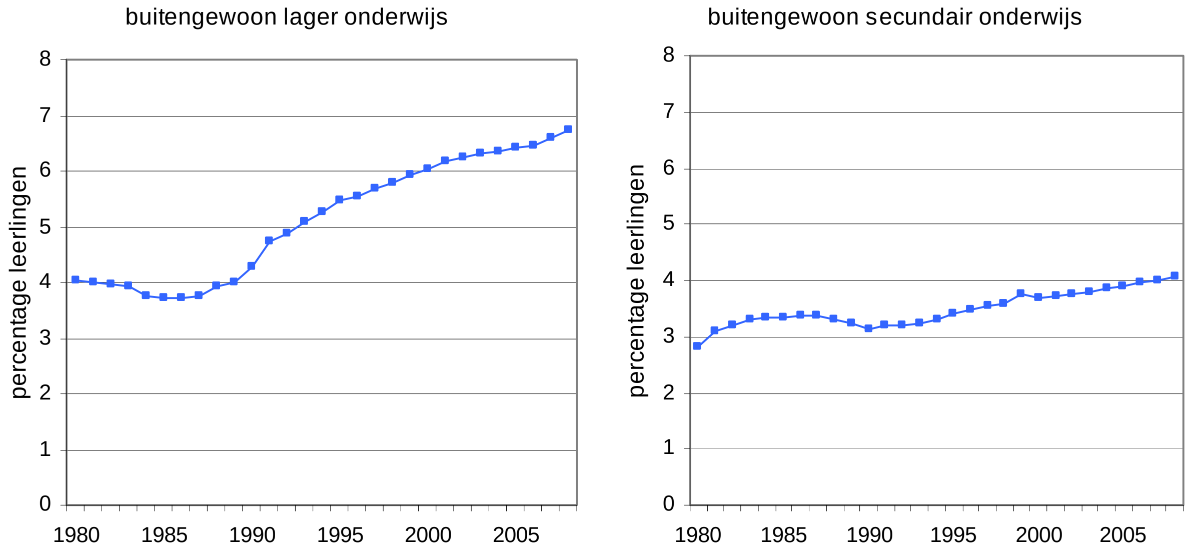
In Vlaanderen hebben jongens vaker een problematische schoolloopbaan dan meisjes. Er zijn opvallend meer jongens dan meisjes in het buitengewoon onderwijs (alle types, alle provincies, alle netten), en er zijn meer jongens in de B-stroom van de eerste graad van het secundair onderwijs. Er zijn meer jongens met schoolse vertraging: 40% van de jongens en 29% van de meisjes zit in de derde graad met schoolse vertraging. Leerlingen die voor zitten op leeftijd zijn dan weer vaker meisjes.

Zittenblijven is een maatregel die in Vlaanderen relatief vaak genomen wordt. Veel leerkrachten vinden deze maatregel zinvol om de schoolse achterstand van de leerling weg te werken. Uit de peilings-resultaten en resultaten van ander onderzoek, is het niet duidelijk of zittenblijven inderdaad effectief is.

Op het vlak van de eindtermen lijken deze leerlingen ondanks de extra leertijd op het einde van het lager onderwijs of de eerste graad toch niet op hetzelfde niveau te presteren als normaalvorderende leerlingen. Goos, Belfi, Lamote en Van Damme (2010) maakten op basis van Vlaamse en internationale onderzoeksliteratuur een stand van zaken op over de effectiviteit van zittenblijven op jonge leeftijd. Zij concluderen dat zittenbljiven op jonge leeftijd doorgaans minder positieve effecten heeft dan gedacht. Leerlingen die zijn bljven zitten presteren over het algemeen zwakker, kunnen minder goed zelfstandig werken, gaan minder graag naar school en verlaten vaker het secundair onderwijs zonder kwalificatie dan gelijkaardige zwakke leerlingen die altijd normaal zijn doorgestroomd.

2.8.2 Hoe gemeenschappelijk is het curriculum tot 14 jaar in Vlaanderen?

Een deel van de leerlingen in Vlaanderen heeft specifieke onderwijsbehoeften waardoor schoollopen in het gewoon onderwijs niet vanzelfsprekend is. Afhankelijk van het probleem dat deze leerlingen ondervinden, hebben zij recht op onderwijs in speciale scholen. Deze leerlingen krijgen een attest voor het buitengewoon onderwijs. In het buitengewoon lager onderwijs zijn er 8 verschillende types, in het buitengewoon kleuteronderwijs zijn er 6 verschillende types. Uit de Statistische Jaarboeken van het Vlaams onderwijs (Vlaams ministerie van Onderwijs en Vorming) blijkt dat de groep van leerlingen in het buitengewoon lager onderwijs gestaag toeneemt, tot intussen bijna 7% van alle leerlingen in het lager onderwijs (Figuur 6.17). Telkens ongeveer één derde van deze leerlingen volgt het type 1 (licht mentale handicap) of het type 8 (ernstige leerstoornissen). Een toenemend aantal leerlingen volgt type 3 voor leerlingen met gedrags- en emotionele problemen. Bijna twee derde van de leerlingen in het buitengewoon lager onderwijs zijn jongens (62%). Dit aandeel bleef de laatste 15 jaar ongeveer constant.



Figuur 6.17 Evolutie van het percentage leerlingen in het buitengewoon lager onderwijs en in het buitengewoon secundair onderwijs

Het aandeel van leerlingen in het buitengewoon secundair nam de laatste jaren ook licht toe (Figuur 6.17) en is nu iets meer dan 4%. In deze groep neemt het aandeel van de jongens langzaam toe: in vijftien jaar is het aandeel van de jongens in buitengewoon secundair licht toegenomen van 61% naar 63%.

In het buitengewoon onderwijs worden geen peilingsonderzoeken georganiseerd. Het buitengewoon onderwijs laat de leerlingen immers geen gemeenschappelijk leerprogramma doorlopen, maar zorgt voor een individueel curriculum dat aangepast is aan de noden en de mogelijkheden van elke leerling. Daarom selecteert het schoolteam de ontwikkelingsdoelen die het voor een bepaalde leerling of leerlingengroep wil nastreven. De doelenselectie wordt vastgelegd in het handelingsplan. Schoolteams kunnen ontwikkelingsdoelen selecteren uit:

- de ontwikkelingsdoelen die voor een bepaald onderwijstype of een bepaalde opleidingsvorm zijn vastgelegd;
- de eindtermen of ontwikkelingsdoelen van het gewoon basisonderwijs of het gewoon secundair onderwijs;
- de ontwikkelingsdoelen die voor andere onderwijstypes of een andere opleidingsvorm zijn vastgelegd.

Ook in de B-stroom van de eerste graad volgen leerlingen een ander curriculum dan leerlingen in de A-stroom. Ongeveer 13% van de leerlingen in het eerste jaar van het secundair onderwijs zit in 1B, ongeveer 18% van de leerlingen in het tweede jaar van het secundair onderwijs zit in BVL. Deze cijfers bleven de laatste jaren ongeveer gelijk.

Voor meer dan een vijfde van de leerlingen gelden de eindtermen van de eerste graad van het secundair onderwijs A-stroom dus niet als minimumdoel. Ook in de A-stroom bereiken veel leerlingen niet de eindtermen. Er zijn heel grote verschillen tussen de verschillende basisopties. Uit het peilingsonderzoek blijkt dat er in de eerste graad van het secundair onderwijs minstens vier groepen bestaan die heel verschillend scoren: drie in de A-stroom (klassieke talen, moderne wetenschappen en technische opties) en één in de B-stroom. Daarbij lijken enkel de leerlingen uit de optiegroep klassieke talen goed tot behoorlijk te presteren op de meeste peilingstoetsen. Aanzielijke aantallen leerlingen uit de technische opties blijken de eindtermen voor de gemeenschappelijke basisvorming niet te beheersen. Zijn de eindtermen van de eerste graad te hoog gegrepen voor leerlingen uit de technische opties? Zijn de eindtermen enkel haalbaar voor leerlingen klassieke talen? Anderzijds blijken veel leerlingen in de technische opties ook minder uren wiskunde te krijgen dan leerlingen moderne wetenschappen. Ook in de B-stroom beheersen veel leerlingen de ontwikkelingsdoelen (die sterk gelijken op de eindtermen voor het basisonderwijs) niet. In het basisonderwijs zijn de peilingsresultaten doorgaans beter. Het basisonderwijs lijkt er beter in te slagen om meer leerlingen over de eindtermenlat te krijgen.

Hierna wordt onderzocht of de opdeling in vier groepen ook uit ander onderzoek blijkt en hoe andere Europese landen hun onderwijs organiseren.

2.8.3 Prestaties van verschillende leerlingengroepen in PISA

Tabel 6.6 geeft de scores weer van de verschillende leerlingengroepen op de laatste drie PISA-onderzoeken. De aso-leerlingen hebben telkens de hoogste gemiddelde score. De gemiddelde scores in tso en kso zijn telkens ongeveer gelijk. De andere onderwijsvormen scoren nog minder goed voor wiskundige geletterdheid.

De onderwijsvormen in de tweede graad zijn min of meer al herkenbaar in de eerste graad. Op basis van analyses op de databank van het Ministerie van Onderwijs en Vorming (2009) werd onderzocht waar leerlingen die in het schooljaar 2003-2004 in het tweede leerjaar secundair onderwijs zaten, een jaar later terecht kwamen.

Bijna alle (98%) van de leerlingen uit de optiegroep klassieke talen komen terecht in het aso. Bij moderne wetenschappen is dat ongeveer 71% voor aso en 22% voor tso. Het aantal leerlingen dat vanuit de technische opties in de tweede graad doorstroomt naar aso is zeer beperkt (3%). Driekwart kiest voor tso en 13% voor kso. Van de BVL-leerlingen gaat 85% het volgende jaar naar het bso, 6% blijft zitten, telkens 1,5% gaat naar het buitengewoon onderwijs of het deeltijds beroepsonderwijs.

De rangorde in prestaties tussen de verschillende onderwijsvormen voor wiskundige geletterdheid in PISA 2009 (zie Tabel 6.6) lijkt sterk op die van de prestatieverschillen tussen de optiegroepen in de eerste graad bij de peilingsonderzoeken.

Tabel 6.6 gemiddelde score van de Vlaamse leerlingengroepen voor PISA

	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009
gemiddelde score	529	520	515
gemiddelde score aso	624,0 (2,1)	607,8 (2,7)	614,2 (3,7)
gemiddelde score tso	546,1 (2,8)	542,2 (3,7)	531,0 (3,5)
gemiddelde score kso	550,6 (10,5)	566,7 (13,5)	523,4 (9,6)
gemiddelde score bso	447,7 (4,0)	443,0 (3,3)	442,9 (3,4)
gemiddelde score dbso	407,0 (13,0)	354,7 (34,2)	425,8 (14,1)
gemiddelde score buso	329,0 (9,7)	372,2 (16,6)	363,6 (9,9)

Significant lager dan in 2009 Significant hoger dan in 2009

Dit alles suggereert ook dat de A-stroom van de eerste graad niet comprehensief is, maar dat de keuze voor de A- of de B-stroom en voor een bepaalde optiegroep in de A-stroom in grote mate bepaalt in welke onderwijsvorm leerlingen in de tweede graad terechtkomen (Tabel 6.7).

Tabel 6.7 Doorstroming van leerlingen van de eerste graad (per optiegroep) naar de verschillende onderwijsvormen in de tweede graad

Einde eerste graad secundair onderwijs schooljaar 2003-2004	Onderwijsvorm in de tweede graad				dubbelt einde 1ste graad
	aso	tso	kso	bso	
Klassieke talen	98,19%	0,94%	0,26%	0,02%	0,6%
Moderne wetenschappen	70,77%	22,02%	1,41%	1,31%	4,50%
Technische opties	3,01%	75,45%	3,02%	13,43%	5,09%
Beroepsvoorbereidend leerjaar	0,00%	0,00%	0,00%	84,53%	6,02%

2.8.4 Leerlingengroepen en resultaten voor wiskunde in Nederland: resultaten van PPON

We zagen eerder hoe de leerlingen in Nederland presteren op het einde van de lagere school. Na het primair onderwijs in Nederland krijgen leerlingen een schooladvies over de schoolvorderingen en de leermogelijkheden. Ze hebben dit attest nodig om zich in te schrijven in het voortgezet onderwijs.

In de Nederlandse PPON werd bij de peiling wiskunde voor het einde van het primair onderwijs (basisonderwijs) aan de leerkrachten primair onderwijs gevraagd welke type voortgezet onderwijs dat elke leerling na de basisschool zal gaan volgen (Janssen, van der Schoot & Hemker, 2005). Volgens de leerkrachten gaat

- 39,9% naar havo en vwo, de meest academische leerwegen (HV)

- 30,9% naar gemengde of theoretische leerweg (GL)
- 12,9% naar kaderberoepsgerichte leerweg (KB)
- 13,5% naar beroepsgerichte leerweg, de meest praktijkgerichte leerweg (BB)

De onderzoekers vergeleken de resultaten van leerlingen op de wiskundepeiling aan het einde van het basisonderwijs ook met het oordeel van hun leerkracht over het verwachte vervolgonderwijs. We zien in Tabel 6.8 dezelfde patronen als in de Vlaamse peilingen op het einde van de A-stroom van de eerste graad secundair onderwijs.

Tabel 6.8 Gemiddelde wiskundescore in het Nederlandse PPON van leerlingen op het einde van het primair onderwijs in functie van het verwachte vervolgonderwijs in het voortgezet onderwijss

	gemiddeld	HV	GL	KB	BB
getallen en getalrelaties	42%	78%	30%	12%	2%
basisoperaties, optellen en aftrekken	76%	94%	77%	60%	34%
basisoperaties, vermenigvuldigen en delen	66%	90%	63%	46%	19%
hoofdrekenen, optellen en aftrekken	50%	80%	42%	25%	7%
hoofdrekenen, vermenigvuldigen en delen	66%	92%	61%	45%	15%
schattend rekenen	42%	78%	29%	10%	3%
bewerkingen, optellen en aftrekken	27%	46%	23%	9%	3%
bewerkingen, vermenigvuldigen en delen	12%	24%	4%	2%	0%
rekenen met zakrekenmachine	34%	64%	22%	10%	2%
verhoudingen	66%	93%	64%	40%	14%
breuken	60%	91%	57%	28%	8%
procenten	50%	91%	52%	27%	7%
tabellen en grafieken	50%	88%	37%	15%	4%
meten: lengte	38%	72%	27%	9%	2%
meten: oppervlakte	21%	47%	8%	2%	0%
meten: inhoud	42%	77%	31%	9%	3%
meten: gewicht	58%	88%	50%	36%	11%
meten: toepassingen	50%	86%	40%	18%	3%
meetkunde	62%	90%	58%	34%	14%
tijd	50%	83%	44%	18%	5%
geld	42%	76%	28%	16%	4%

Net zoals in de Vlaamse resultaten van de peilingen in de A-stroom van de eerste graad, bereiken de leerlingen die volgens de leerkrachten vermoedelijk de meest academische leerweg zullen inslaan in Nederland (HV) het best de beoogde doelen van wiskunde. Nochtans ging het om een peiling op het einde van het lager onderwijs, dus op het moment van de afname hadden alle leerlingen samen hetzelfde curriculum van het primair onderwijs doorlopen.

In de groep die vermoedelijk de beroepsgerichte leerweg zal kiezen (vergelijkbaar met de Vlaamse B-stroom), zijn de resultaten zeer zwak. In de wiskundetoets waarop het best gescoord wordt bereikt slechts 34% van hen de standaard 'voldoende'. In twee toetsen bereikt niemand van de leerlingen die op de beroepsgerichte leerweg georiënteerd wordt deze standaard.

2.8.5 Groeperingen van leerlingen in andere landen

Volgens Standaert (2010) groeit sinds het jaar 2000 in Europa het pleidooi voor een geïntegreerde structuur van het secundair onderwijs. Hiermee bedoelt men een secundair onderwijs waarbij verschillende afzonderlijke onderwijstypes en afdelingen worden samengebracht met de bedoeling de beschotten daartussen te doorbreken en overgangen tussen verschillende types mogelijk te maken. In een dergelijke geïntegreerde structuur moeten leerlingen maximale kansen krijgen om geleidelijk een succesvolle schoolloopbaan door te maken. Tegelijkertijd leren de jongeren omgaan met de diversiteit van de medeleerlingen, en dit kan volgens Standaert de sociale cohesie in de maatschappij bevorderen. Deze geïntegreerde structuur brengt een verlengde gemeenschappelijke vorming tot een bepaalde leeftijd mee en houdt ook in dat de keuze voor een studierichting of een beroep niet te vroeg mag plaatsvinden.

De vraag is hoe binnen zo'n nieuwe structuur 'middelmaatonderwijs' vermeden kan worden: onderwijs waarbij sterkere leerlingen niet uitgedaagd worden en minder sterke leerlingen overvraagd. Om hier een antwoord op te krijgen, onderzocht Standaert op welke verschillende manieren leerlingen in het buitenland gegroepeerd worden.

Vier verschillende types van groepering

De Franse onderzoekster Mons (2007) onderscheidt vier types in gradatie van integratie, na de lagere school (zie Tabel 6.9). Het eerste type, het *categoriale type*, houdt gescheiden routes in na het basisonderwijs op basis van schoolresultaten. Dit systeem wordt gehanteerd in onder meer Duitsland, Nederland, Ierland, Zwitserland, maar ook min of meer in België. In het tweede type, het *niveaugroepentype*, hebben leerlingen tot 16 jaar hetzelfde curriculum, maar wel opgedeeld in niveaus voor klassen of vakken. Deze integratievorm komt vaak voor in Angelsaksische landen (Engeland, VS, Canada, Australië, Nieuw-Zeeland). Het derde type wordt het *zittenblijverstype* genoemd. Dit wordt gekenmerkt door een gemeenschappelijk curriculum tot 15 of 16 jaar, heterogene groepen en zittenblijven voor wie niet slaagt. Frankrijk, Spanje, Portugal en Griekenland hanteren dit systeem. Het vierde model, het *differentiëringsmodel*, komt vooral voor in Scandinavië. De leerlingen blijven hierbij heterogeen gegroepeerd tot 16 jaar, maar krijgen aangepast onderwijs via differentiatiemechanismen als kleine groepjes, inhaallessen en vormen van binnenklasdifferentiatie.

Tabel 6.9 Vier types in gradatie van integratie volgens Mons

Integratietype	kenmerken	landen
categoriale type	▪ gemeenschappelijk basisonderwijs met zittenblijven ▪ gescheiden routes na lager onderwijs	Duitsland, Oostenrijk, Hongarije, Zwitserland, Ierland, Nederland, (België)
niveaugroepentype	▪ zelfde curriculum tot 16 jaar ▪ indeling in niveaus: streaming (klassen) of setting (vakniveaus)	Angelsaksisch: Engeland, Verenigde Staten, Canada, Australië, Nieuw-Zeeland,
zittenblijverstype	▪ gemeenschappelijk tot 15 – 16 jaar ▪ heterogene groepen ▪ zittenblijven	Frankrijk, Spanje, Portugal, Griekenland
differentiëringstype	▪ heterogene groepen tot 16 jaar ▪ differentiatie: kleine groepjes, inhaallessen, binnenklasdifferentiatie	Scandinavië

Effecten van deze groeperingen op minder sterke leerlingen

Dupriez e.a. (2008) onderzochten hoe het de 25% laagst scorende leerlingen vergaat in deze 4 types. Ze baseerden zich hiervoor op gegevens van PISA 2003. Op het vlak van schoolloopbaan zijn er bij het categoriale type veel zittenblijvers tijdens de lagere school, maar minder in het secundair onderwijs, waar deze leerlingen vooral in het beroepsvoorbereidend onderwijs voorkomen. Het derde type kent veel zittenblijvers in de lagere school én in het secundair onderwijs. In de twee andere types is een jaar overzitten zeldzaam. Verder vergeleek Dupriez de toetsresultaten van de 25% laagscoorders met het gemiddelde van de totale groep. Dat verschil bleek het kleinst bij het differentiëringstype. Ook het verschil tussen de socio-culturele samenstelling van de 25% laagst presterende leerlingen en de socio-culturele samenstelling van de gehele groep is het kleinste bij het differentiëringsmodel. Voor de drie andere types is dat verschil groter, maar ligt de sociale samenstelling van de laagscoorders dichter bij elkaar. De 25% laagscoorders verschillen onderling dus minder dan de gehele groep, maar zitten qua samenstelling verder af van de gemiddelde samenstelling van de gehele groep, vergeleken met het differentiëringstype. Bij het disciplineklimaat scoort het differentiële type opnieuw het best en de eerste twee types het slechtst. Het zelfconcept is bij elk van de 4 types geringer bij de 25% slechtscoorders dan het gemiddelde van de groep. Het minst slecht scoort hier het categoriale type. Hoe groter en breder de groep waarmee een laagscoorder zich vergelijkt, hoe breder hij de kloof ziet met de best presterenden.

2.9 Sleutelcompetenties in PISA en de Vlaamse ET/OD

Er zijn verschillende conceptuele kaders waarin wiskundige prestaties kunnen vergeleken worden. Het internationaal PISA-onderzoek, ontwikkeld door het Freudenthal instituut in opdracht van de OESO, vertrekt van een ideaalbeeld voor wiskundeonderwijs. In de Europese Unie worden onderwijssystemen geleidelijk meer op elkaar afgestemd, hiervoor worden onder meer sleutelcompetenties beschreven. PISA en de sleutelcompetenties van de Europese Unie kunnen inzicht geven in de wiskundige doelen die internationaal naar voren geschoven worden.

2.9.1 Verband tussen PISA en Vlaamse eindtermen

PISA wordt afgenomen bij leerlingen van 15 jaar. De meeste van deze leerlingen zitten in de tweede graad van het secundair onderwijs, en zijn al in een studierichting georiënteerd.

PISA meet *wiskundige geletterdheid*. PISA 2009 definieert wiskundige geletterdheid als 'het vermogen om de rol van wiskunde in het dagelijks leven in te schatten, om goed gefundeerde beslissingen te nemen en om wiskunde te gebruiken op manieren die tegemoet komen aan de noden van het leven van een persoon als constructieve, betrokken en denkende burger'. In principe onderzoekt PISA overkoepelende ideeën die los staan van inhoudsdomeinen, maar Vlaamse onderzoekers leggen toch vaak het verband met leerinhouden.

Van Nijlen e.a. (2006) onderzochten de overeenkomsten en verschillen tussen TIMSS, PISA en de Vlaamse eindtermen. De meeste opgaven uit de PISA-toets voor wiskundige geletterdheid vertonen een goede overeenkomst met de eindtermen voor de tweede graad aso (Tabel 6.10). Voor kso, tso en de eerste graad A-stroom past ongeveer twee derde van de PISA-opgaven binnen de eindtermen. Voor het bso, waar wiskunde opgenomen is in PAV, kunnen erg weinig PISA-opgaven gekoppeld worden aan de eindtermen PAV.

Tabel 6.10 Percentage PISA-opgaven dat overeenkomt met de Vlaamse eindtermen voor de eerste graad (A-stroom), de tweede graad aso, kso/tso en bso

1e graad A-stroom	61%
2de graad aso	95%
2de graad kso en tso	67%
2de graad bso	13%

Anderzijds gaan de Vlaamse eindtermen vaak een stuk verder dan het conceptueel kader waarbinnen PISA werkt voor wiskundige geletterheid. Zo zijn er in de eerste graad en de tweede graad telkens een behoorlijk aantal eindtermen die niet aan bod komen in het conceptueel kader van PISA, en dus ook niet via PISA getoetst worden. Zo kunnen bijvoorbeeld eindterm 20 (over merkwaardige producten $(a+b)^2$ en $(a+b).(a-b)$) en eindterm 21 (over het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende) van de eerste graad A-stroom niet geplaatst worden binnen het PISA-onderzoek (Van Nijlen, e.a., 2006).

2.9.2 Sleutelcompetenties in Europa

De Europese Unie (2006) heeft een raamwerk ontwikkeld waarin 'sleutelcompetenties' zijn opgenomen. Onder sleutelcompetenties verstaat men die competenties die elk individu nodig heeft voor zijn zelfontplooiing en ontwikkeling, actief burgerschap, sociale integratie en zijn werk. Eén van die sleutelcompetenties is 'wiskundige competentie'.

Wiskundige competentie wordt gedefinieerd als het vermogen wiskundige denkpatronen te ontwikkelen en toe te passen om diverse problemen in dagelijkse situaties op te lossen. Deze competentie is gebaseerd op een degelijke beheersing van rekenvaardigheid, waarbij het accent op procedures en activiteit, maar ook op kennis ligt. Wiskundige competentie houdt – in uiteenlopende mate – het vermogen en de bereidheid in om wiskundige denkmethoden (logisch en ruimtelijk denken) toe te passen en wiskundige voorstellingen (formules, modellen, constructies, grafieken/diagrammen) te gebruiken.

De noodzakelijke kennis van wiskunde omvat een gedegen kennis van getallen, maateenheden en structuren, de basisbewerkingen en wiskundige basisvoorstellingen, begrip van wiskundige termen en begrippen, en van de vragen waarop de wiskunde antwoord kan geven. Men moet over de vaardigheden beschikken om de wiskundige grondbeginselen en procedures in dagelijkse situaties thuis en op het werk toe te passen en argumentatieketens te volgen en te beoordelen. Men moet in staat zijn wiskundig te redeneren, wiskundige bewijzen te begrijpen, wiskundig te communiceren en de juiste hulpmiddelen te gebruiken. Een positieve attitude in de wiskunde is gebaseerd op respect voor de waarheid en de bereidheid naar redenen te zoeken en hun validiteit te beoordelen.

Het Europees Parlement en de Raad van Europa keurden op 18 december 2006 een aanbeveling goed die onder meer inhoudt dat 'het initieel onderwijs en de initiële opleiding alle jongeren de mogelijkheid bieden om hun sleutelcompetenties zodanig te ontwikkelen dat zij toegerust zijn voor het verdere leven, het werkzame leven en het leven als volwassenen' en dat er 'passende voorzieningen worden getroffen voor jongeren die als gevolg van een onderwijsachterstand door persoonlijke, sociaal-culturele of economische omstandigheden speciale ondersteuning behoeven om hun onderwijsmogelijkheden te realiseren'.

Zowel de resultaten van de peilingen op het einde van het lager onderwijs, het einde van de A- en de B-stroom van de eerste graad, als de resultaten op internationaal onderzoek tonen aan dat het Vlaams onderwijssysteem er niet of onvoldoende in slaagt om bij bepaalde groepen leerlingen de minimudoelen van de basisvorming of een minimaal niveau van wiskundige geletterdheid te realiseren. Er zijn bovendien zowel in de internationale onderzoeken (bijvoorbeeld TIMSS), in de Vlaamse peilingen, als de schoolloopbaangegevens in Vlaanderen aanwijzingen dat het basisonderwijs er beter in slaagt dan het secundair onderwijs om bij de meeste leerlingen een vooropgesteld gemeenschappelijk minimum te realiseren. Het is dan ook de vraag welke inhoudelijke en structurele keuzes er best voor kunnen zorgen dat zoveel mogelijk leerlingen uiteindelijk de uitdagende internationale doelen op het vlak van wiskundige competenties verwerven tijdens het leerplichtonderwijs.

3 Bronnen

Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming (AKOV) (2009). *Conferentie na peiling wiskunde – Secundair onderwijs – eerste graad – B-stroom. Confereniemap*. Brussel, Vlaams ministerie van Onderwijs en Vorming, 71 pp. Raadpleegbaar op http://www.ond.vlaanderen.be/dvo/peilingen/secundair/so1BVLwiskunde08.htm

Agirdag, O., Van Houtte, M. en Van Avermaet, P. (2011). Why does the ethnic and socio-economic composition of schools influence math achievement? The role of sense of futility and futility culture. *European Sociological Review*. Doi: 10.1093/esr/jcq070

Barber, M. en Mourshed, M. (2007). *How the world's best-performing school systems come out on top.* McKinsey & Company. Raadpleegbaar op http://www.mckinsey.com/App_Media/Reports/SSO/Worlds_School_Systems_Final.pdf.

Boe, E., May, H. en Boruch, R. (2002). *Student task persistence in the third international mathematics and science studie: a major source of achievement differences at the national, classroom, and student levels.* Philadelphia: Center for Research and Evaluation in Social Policy, University of Pennsylvania. Raadpleegbaar op http://www.gse.upenn.edu/cresp/pdfs/20070130151136207.pdf

Clark Tuttle, C., Teh, B., Nichols-Barrer, I., Gill, B. P., en Gleason, Ph. (2010). *Student Characteristics and Achievement in 22 KIPP Middle Schools*. (final report). Washington, Mathematica Policy Research. Raadpleegbaar op http://www.mathematica-mpr.com/publications/PDFs/education/KIPP_fnlrpt.pdf

De Meyer, I., Pauly, J. en Van de Poele, L. (2004). *Leren voor de problemen van morgen. De eerste resultaten van PISA 2003.* Gent: Vakgroep Onderwijskunde en Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap – Departement Onderwijs. Raadpleegbaar op http://www.ond.vlaanderen.be/publicaties/eDocs/pdf/208.pdf

De Meyer, I, en Warlop, N. (2010). *PISA Leesvaardigheid van 15-jarigen in Vlaanderen. De eerste resultaten van PISA 2009.* Brussel: Departement Onderwijs en Vorming – Afdeling Strategische

Beleidsondersteuning. Raadpleegbaar op
http://www.ond.vlaanderen.be/nieuws/2010/bijlagen/20101207-PISA.pdf

Deneire, A., Van Petegem, P. en Gijbels, D. (2009*). Onze leerkrachten vandaag: lesgeven in de eerste graad secundair onderwijs. Eerste resultaten van de Teaching And Learning International Survey (TALIS).* Brussel, Departement Onderwijs en Vorming, Afdeling Strategische Beleidsondersteuning.

Desoete, A., (2010). *Dyscalculie … een diagnose alleen maar zinvol om leerlingen te helpen. Uiteenzetting* op Onderwijscafé, Gent, 12 december 2010*.* Presentatie raadpleegbaar op
http://www.pbdgent.be/sites/default/files/Wel%20in%20je%20vel%20onderwijscafe%20december%202010.pdf

Dupriez, V., Dumay, X en Vause, A. (2008). How do school systems manage pupil's heterogeneity? *Comparative education research, 52(2),* 245-273

Europees parlement en de Raad (2006). Aanbeveling van 18 december 2006 inzake sleutelcompetenties voor een leven lang leren. (2006/962/EG). *Publicatieblad van de Europese Unie*, 30-12-2006, L 394/10 – L394/18. Raadpleegbaar op
http://www.fi.uu.nl/nl/wiki/europa/sleutelcompetenties/documents/20061230_sleutelcompetenties_levenlangleren.pdf

Europese Commissie (2004). *Implementation of 'Education and Training 2010' work programme. Key Competences for lifelong learning: a European reference framework. Working group B "key competences".* Brussel: European Commission. Raadpleegbaar via:
http://ec.europa.eu/education/policies/2010/doc/basicframe.pdf

Gielen, S., Willem, L., De Meyst, M., Beringhs, S., Crynen, M., Luyten, B. en Janssen, R. (2010). *Peiling wiskunde in het basisonderwijs. Eindrapport.* Leuven: K.U.Leuven, Centrum voor Onderwijseffectiviteit en –evaluatie.

Gielen, S., Van Dessel, K., De Meyst, M., Beringhs, S., Crynen, M., Luyten, B. en Janssen, R. (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad van het secundair onderwijs (A-stroom) - Eindrapport.* Leuven: K.U.Leuven, Centrum voor Onderwijseffectiviteit en –evaluatie.

Goos, M., Belfi, B., Lamote, C., & Van Damme, J., (2010). Zittenbljiven op jonge leeftijd: 1 stap achteruit en vervolgens 2 stappen vooruit? *Welwijs, 21 (2),* 26-29.

Groenez, S., Nicaise, I. en De Rick, K.(2009). *De ongelijke weg door het onderwijs*. In L. Vanderleyden, M. Callens, J. Noppe, (Red.). De sociale staat van Vlaanderen. Brussel: Studiedienst van de Vlaamse Regering. Raadpleegbaar op: http://hiva.kuleuven.be/resources/pdf/publicaties/R1272.pdf

Hirtt, N., Nicaise, I. en De Zutter, D. (2007) *De school van de ongelijkheid.* Berchem: uitgeverij Epo.

Janssen, J., van der Schoot, F., en Hemker, B., (2005) *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*. Arnhem: Cito.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2009), *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering. Advies.* Amsterdam: KNAW.

Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (2010). *Terug naar de kern van het onderwijs.* Nieuwsbericht van minister van Bijsterveldt op 07-12-2010. Raadpleegbaar op
http://www.rijksoverheid.nl/nieuws/2010/12/07/van-bijsterveldt-terug-naar-de-kern-in-het-onderwijs.html

van Bijsterveldt – Vliegenthart, M. (2010). *Actieplan Beter Presteren: adviesvraag aan de voor zitter van de Onderwijsraad*. Den Haag: Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap. Raadpleegbaar op http://www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/brieven/2010/12/07/actieplan-beter-presteren-advies-aanvraag.html

Mons, N. (2007). *Les nouvelles politiques éducatives. La France fait-elle les bons choix*? Paris: Presses Universitaires de France

Prenger, J., (2005). *Taal telt! Een onderzoek naar de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in het realistisch wiskundeonderwijs.* Groningen: Rijksuniversiteit - Groningen Dissertations in Linguistics, nummer 57. Raadpleegbaar op http://irs.ub.rug.nl/ppn/288998936

Prenger, J. (2006). Woorden tellen mee. Een onderzoek naar talige struikelblokken in het wiskundeboek. *Levende Talen Tijdschrift,* jg 7, 3, 17-24

Prenger, J., (2007). Uitgerekend taal! Een onderzoek naar begripsproblemen bij wiskundeopgaven. *Levende Talen Tijdschrift*, jg 8, 2, 10-16.

Prenger, J. (2007). Met taal kun je rekenen. De rol van taalvaardigheid en tekstbegrip bij het oplossen van een wiskundeopgave. *Volgens Bartjens...Tijdschrift voor reken-wiskunde-onderwijs,* jg 26, 4-7

Smet, P. (2009) *Beleidsnota Onderwijs 2009-2014: Samen grenzen verleggen voor elk talent*. Brussel: Vlaamse overheid.

Standaert, Roger (2010)*,* Tendensen in het secundair onderwijs in de Europese Unie. *Impuls, 41 (2*), 75-87

Van Damme, J. (2007). *PIRLS 2006: Vlaanderen in de wereld*. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven. Raadpleegbaar via: http://ppw.kuleuven.be/pirls/PIRLS%202006%20internationale%20resultaten.pdf

van den Boer, C.J.E.M. (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: CD-beta press.

Van den Broeck, A., Van Damme, J., Brusselmans-Delhairs, C. en Valcke, M. (2004). *Vlaanderen in TIMSS 2003.* Brussel: Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap. Raadpleegbaar op http://www.ond.vlaanderen.be/onderwijsstatistieken/2003-2004/Vlaanderen-timss-2003.pdf

Van Nijlen, D., Janssen, R., Crauwels, M., Janssens D., Rijmenans, R. Verschaffel, L. (2006). *TIMSS en PISA in relatie tot de Vlaamse eindtermen. Eindrapport.* Leuven: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Nijlen, Daniël (2010). *Bridging the gap: applying psychometric models in educational practice.* Doctoraatsproefschrift, K.U.Leuven, Centrum voor onderwijseffectiviteit en –evaluatie, Onderzoeksgroep Kwantitatieve Psychologie en Individuele Verschillen.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2008). *Beginsituatie van de leerlingen in het eerste leerjaar B van het secundair onderwijs* (OBPWO 06.00). Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Strategisch Onderwijs- en Vormingsbeleid.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2008). *Peiling lezen en luisteren (Nederlands) in het basisonderwijs*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Entiteit Curriculum (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (B-stroom)*. Brussel: Departement Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Peiling wiskunde in de eerste graad secundair onderwijs (A-stroom)*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Onderzoeksteam periodieke peilingen & Curriculum (2010). *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs*. Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Curriculum.

Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming (2009). *Statistisch jaarboek van het Vlaams onderwijs (schooljaar 2008-2009)*. Brussel: Stafdiensten Onderwijs en Vorming

Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming (2009). *De B-stroom in de eerste graad van het secundair onderwijs: in- en uitstroom.* (niet gepubliceerde nota). Brussel: afdeling Strategische Beleidsondersteuning en Entiteit Curriculum

Willem, L., Janssen, R., Luyten, B. (2009). *Peiling wiskunde in de eerste graad van het secundair onderwijs B-stroom - Eindrapport*. Leuven: K.U.Leuven, Centrum voor Onderwijseffectiviteit en -evaluatie.

Wössmann, L. en West, M. (2002). *Class-Size effects in School Systems Aroud the World: Evidence from Between-Grade Variation in TIMSS.* Massachusetts: Education policy and Governance, Harvard University. Raadpleegbaar op http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED467039.pdf

Informatie over het KIPP in de Verenigde Staten is te vinden op:

http://www.kipp.org/about-kipp

http://voices.washingtonpost.com/answer-sheet/charter-schools/myths-and-realities-about-kipp.html

4 Reflectie over de resultaten door andere onderwijspartners

4.1 De impact van sociaal-economische en etnische afkomst van de leerlingen en de impact van samenstelling van het leerlingenpubliek van scholen op de wiskundeprestaties. Orhan Agirdag en Mieke Van Houtte , UGent

4.1.1 Inleiding

Het is al langer geweten dat de onderwijsprestaties van de leerlingen in sterke mate beïnvloed worden door sociale factoren die buiten hun leercapaciteiten liggen. Uit recent onderzoek in Vlaanderen – dat hieronder wordt gerapporteerd – wordt opnieuw duidelijk dat de wiskundeprestaties van leerlingen op het einde van het lager onderwijs (3de graad) voor een belangrijk deel bepaald worden door hun sociaal-economische en etnische afkomst. Waarover echter – zeker in de Vlaamse context – minder geweten is, is in welke mate de wiskundeprestaties van de leerlingen ook beïnvloed worden door de sociaal-economische en etnische samenstelling van de scholen. Met andere woorden, de vraag is of het voor de wiskundeprestaties van de leerlingen uitmaakt in *welke soort scholen met welke soort publiek* ze schoollopen. Zo zijn er wel veronderstellingen dat het ‘niveau’ lager zou liggen in ‘concentratiescholen’, maar bij afwezigheid van onderzoek blijven dit slechts veronderstellingen. Naar het onderwijsbeleid toe, meer specifiek naar een eventueel spreidingsbeleid toe, is een antwoord bieden op deze vragen echter van kapitaal belang. Bovendien moeten we ons de vraag te stellen *hoe* we de eventuele effecten die uitgaan van de sociaal-economische en etnische samenstelling van de scholen kunnen verklaren, om uiteindelijk remedies en beleidsvoorstellen te formuleren.

In hetgeen wat volgt, zullen we ten eerste kort uitleg geven over het opzet van het onderzoek en de gegevens waarover beschikken. Daarna zullen we nagaan welke effecten uitgaan van de sociaal-economische en etnische achtergrond van de leerlingen en van de samenstelling van scholen. Vervolgens proberen we verklaringen te formuleren voor de gevonden effecten. We eindigen met een korte conclusie en formuleren enkele beleidsvoorstellen.

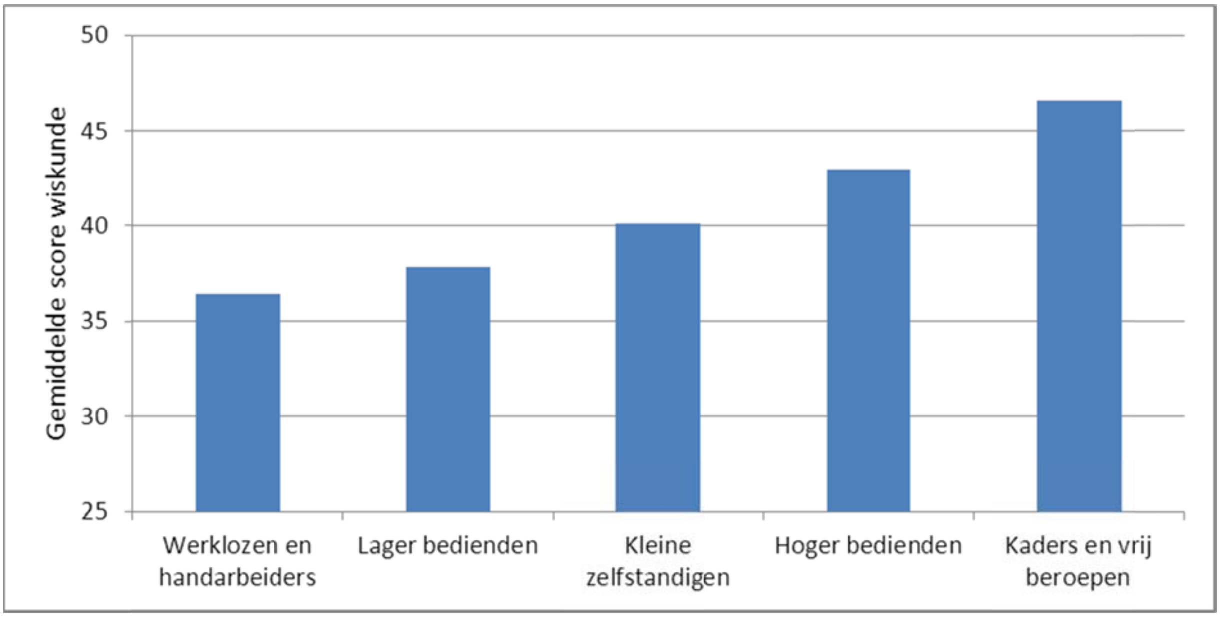
4.1.2 Het onderzoek

De gegevens van deze studie maken deel uit van het FWO-project (G.040908) Segregatie in het Basisonderwijs dat wordt uitgevoerd (2008-2011) door UGent (CuDOS), KULeuven (HIVA) en UAntwerpen (Cemis). De dataverzameling werd uitgevoerd in het schooljaar 2008-2009, waarbij er een getrapte steekproef werd getrokken. Om voldoende variatie te hebben met betrekking tot de etnische en sociaal-economische samenstelling van de scholen, zijn er eerst drie Vlaamse steden geselecteerd met een diverse populatie (Genk, Antwerpen en Gent). Onze gegevens zijn dus enkel representatief voor stedelijke contexten. Gebruik makend van de gegevens van het Departement Onderwijs en Vorming van de Vlaamse Gemeenschap, werden in deze steden 116 lagere scholen gecontacteerd en 68 scholen (vestigingen) zegden toe om mee te werken aan het onderzoek (respons van 54%, zonder systematische vertekening). Binnen de scholen die uiteindelijk toestemden om deel te nemen aan het onderzoek, werden de leerlingen uit het vijfde en het zesde leerjaar en alle leerkrachten bevraagd. Leerlingen vulden de vragenlijsten in onder de supervisie van een leerkracht en één of twee leden van het onderzoeksteam. Uiteindelijk werden 2845 leerlingen en 705 leerkrachten bevraagd.

De wiskundeprestaties werden gemeten op basis van een genormeerde rekentoets die ontwikkeld werd door Dudal en Deloof (2004). Deze toets bevat 60 vragen en peilt naar kennis over vier domeinen, namelijk (1) vraagstukken, (2) hoofdrekenen, (3) getallenleer en (4) cijferen. Om er zeker van te zijn dat de vragen gedekt zijn door de curricula van de scholen, werden de testen voorgelegd aan de directeurs van de scholen. Twee scholen werden uit de data geweerd, omdat de directies niet konden bevestigen dat de test werd gedekt door het schoolcurriculum. De vragenlijsten waren volledig anoniem.

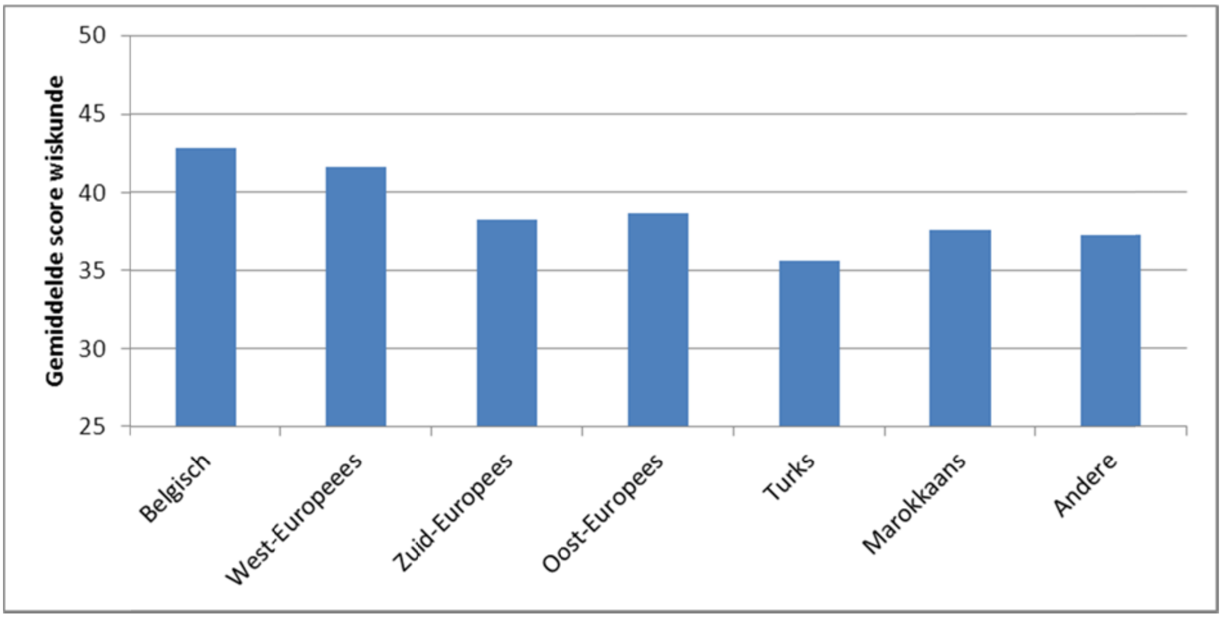
4.1.3 Sociaal-economische en etnische achtergrond van leerlingen

Figuur 1 geeft een schets van de bestaande sociaal-economische ongelijkheden in wiskundeprestaties. We hebben de sociaal-economische afkomst van de leerlingen nagegaan op basis van de sociale status van de beroepspositie van de ouders. We namen de hoogste beroepspositie van beide ouders als de indicator van de sociale afkomst van de leerling. Figuur 1 maakt duidelijk dat leerlingen van een hogere sociaal-economische afkomst veel beter presteren in wiskunde dan leerlingen van een lagere sociaal-economische afkomst. Het valt op dat kinderen die helemaal boven op de sociale ladder staan (wiens ouders kaderfuncties bekleden of een vrij beroep hebben) tot anderhalf maal beter scoren in wiskunde dan kinderen wiens ouders handenarbeid verrichten of (langdurig) werkloos zijn.

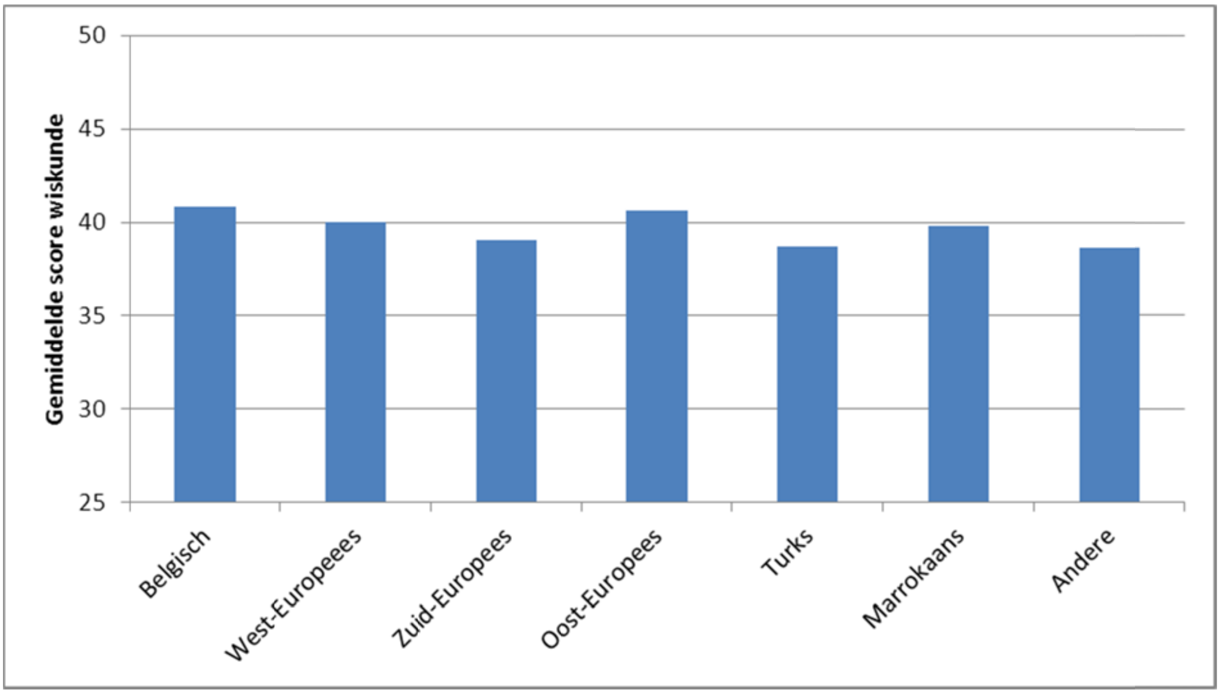


Figuur 1: Gemiddelde scores op wiskunde van leerlingen (min= 0; max = 60) naargelang hun sociaal-economische afkomst

Figuur 2 toont dat de wiskundeprestaties van de leerlingen ook samenhangen met hun etnische afkomst. We hebben de etnische afkomst van de leerlingen nagegaan op basis de geboorteplaats van de grootmoeders en de ouders van de leerlingen. Uit Figuur 2 blijkt dat etnisch Belgische leerlingen gemiddeld het hoogst scoren in wiskunde, gevolg door West-Europeanen, Oost-Europeanen, Zuid-Europeanen, Marokkanen en 'andere' allochtonen, terwijl leerlingen van Turkse afkomst het slechtst scoren. Echter, deze bevinding dient sterk genuanceerd te worden. Immers, wanneer we rekening houden met de sociaal-economische afkomst van de leerlingen – zoals afgebeeld in Figuur 3 – blijken deze ongelijkheden tussen verschillende etnische groepen, sterk te reduceren, zo niet te verdwijnen. Met andere woorden, de etnische afkomst van de leerlingen is minder doorslaggevend voor hun wiskundeprestaties dan hun sociale afkomst.



Figuur 2: Gemiddelde scores op wiskunde van de leerlingen (min= 0; max = 60) naargelang hun etnische afkomst

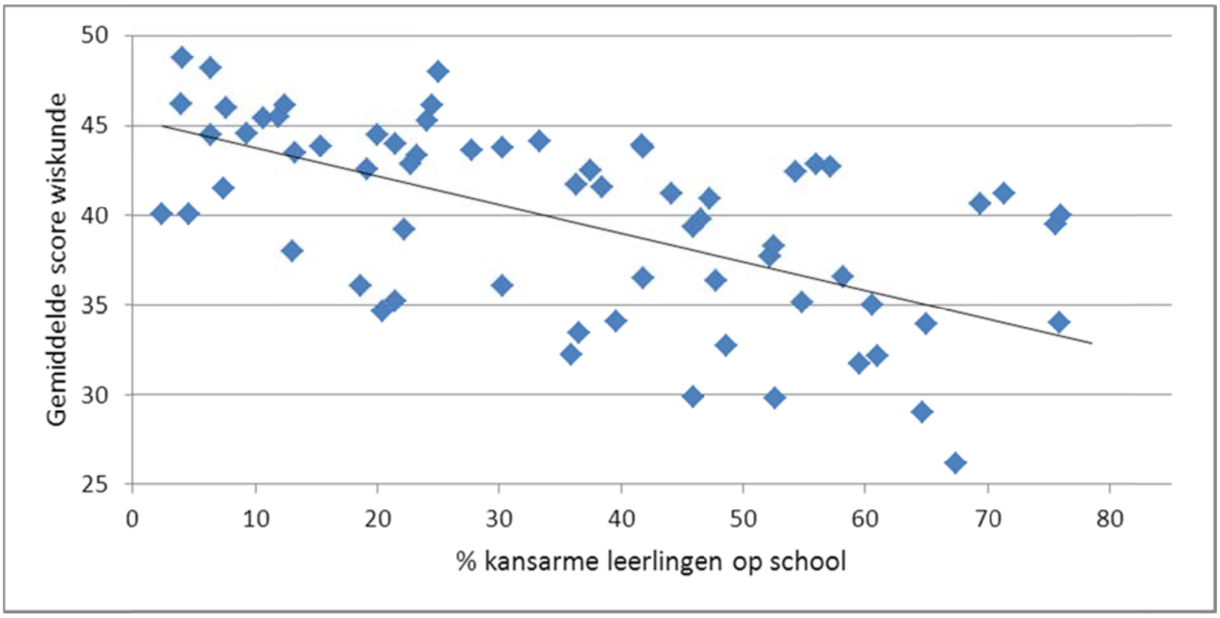


Figuur 3: Gemiddelde scores op wiskunde van leerlingen (min= 0; max = 60) naargelang hun etnische afkomst, rekening houdend met hun sociaal-economische achtergrond

4.1.4 Sociaal-economische en etnische samenstelling van scholen

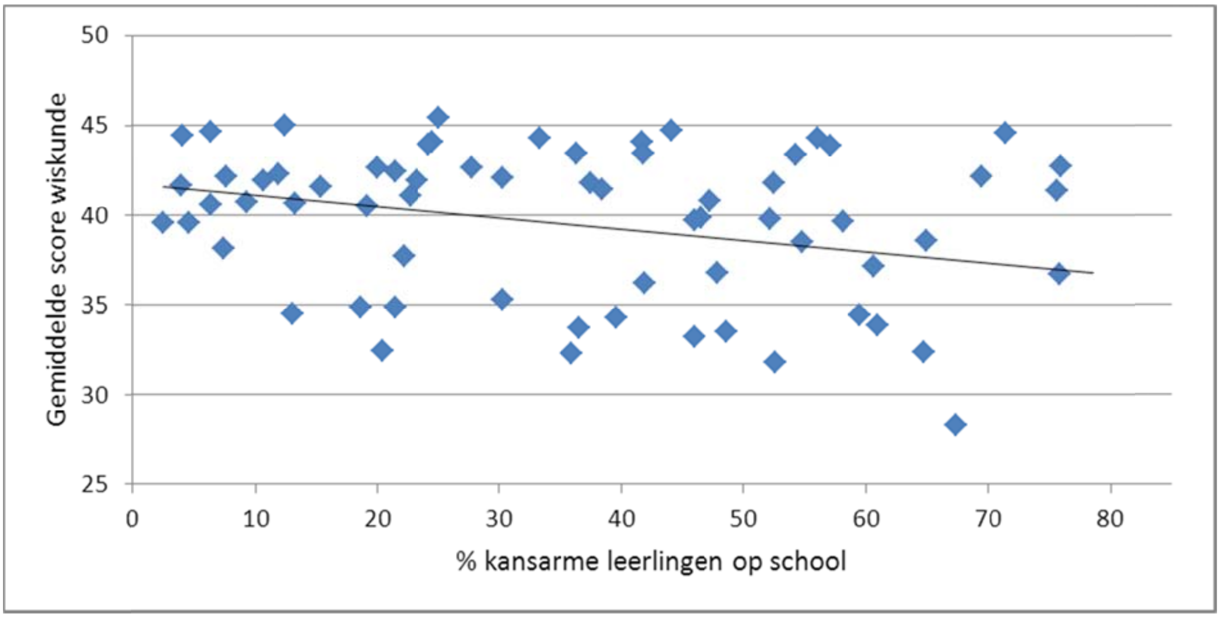
Tot nu toe hebben we enkel de impact van de *individuele* sociaal-economische en etnische afkomst besproken. Zoals we in onze inleiding al hebben aangehaald, is een volgende vraag of de sociaal-economische en etnische afkomst van het *publiek* in de scholen ook een rol speelt met betrekking tot wiskundeprestaties van de leerlingen.

Figuur 4 geeft een beeld van de gemiddelde wiskundeprestaties per school, naargelang het aandeel kansarme leerlingen in deze scholen. Een kansarme leerling wordt hier gedefinieerd als een leerling wiens ouders werklozen of handarbeiders zijn. Het valt op dat leerlingen die schoollopen in scholen met een hogere proportie van kansarme leerlingen beduidend lager scoren op wiskunde dan leerlingen in scholen met weinig leerlingen uit deze kansarme groepen: de trendlijn is duidelijk neerwaarts.



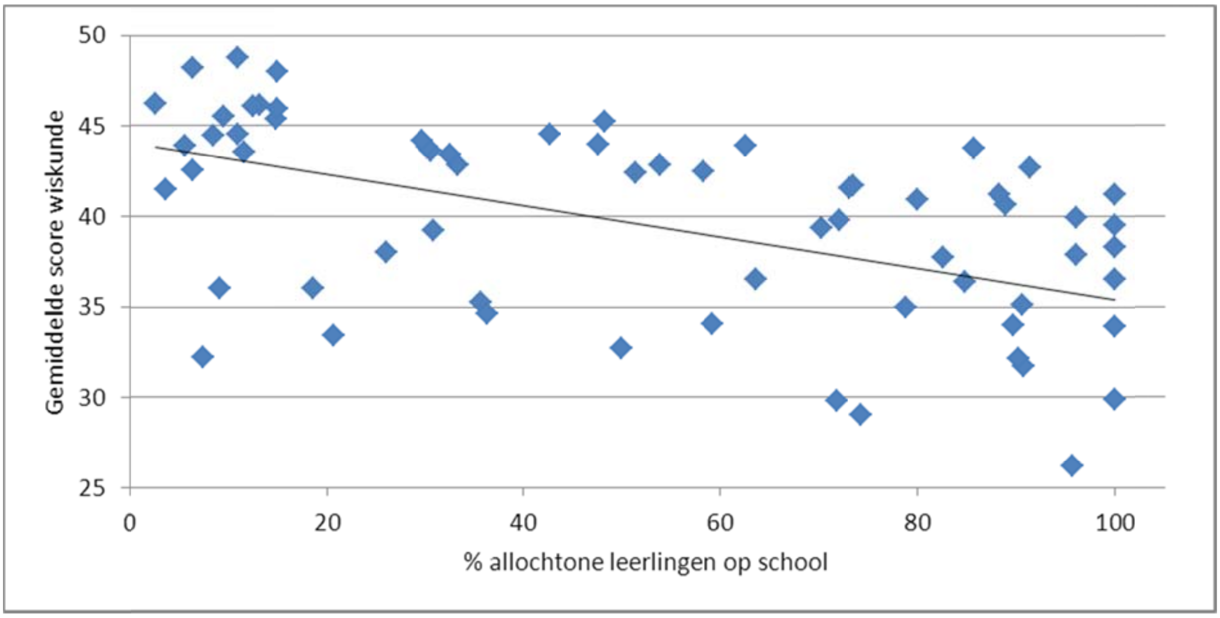
Figuur 4: Gemiddelde scores op wiskunde voor scholen (min = 0; max = 60) naar percentage kansarme leerlingen op school

Het is echter te voorbarig om op basis van de bovenstaande gegevens te besluiten dat leerlingen minder goed presteren in wiskunde *omwille* van het publiek in deze scholen. Het zou immers kunnen dat de leerlingen in scholen met veel kansarme leerlingen vooral slecht scoren omwille van hun eigen *individuele* sociaal-economische afkomst. We dienen dit laatste aspect dus in rekening te brengen. De resultaten van een dergelijke operatie staan afgebeeld in Figuur 5. We zien dan dat zelfs indien we rekening houden met de individuele sociaal-economische afkomst van de leerlingen, de negatieve trend nog steeds aanwezig is: hoe groter de proportie kansarme leerlingen op school, hoe lager de scores voor wiskunde. Vergeleken met Figuur 4 wordt echter duidelijk dat de trendlijn veel minder steil is. Dit betekent dat de verschillen tussen de scholen wat betreft wiskundeprestaties vooral veroorzaakt worden door de *individuele* sociaal-economische achtergronden van de leerlingen zelf in deze scholen. Maar ook de sociaal-economische samenstelling van het leerlingenpubliek speelt duidelijk een rol. Met andere woorden, een leerling presteert over het algemeen volgens zijn/haar eigen sociaal-economische achtergrond, maar in school met meer kansrijke medeleerlingen scoort hij/zij gemiddeld beter dan in een school met veel kansarme medeleerlingen.

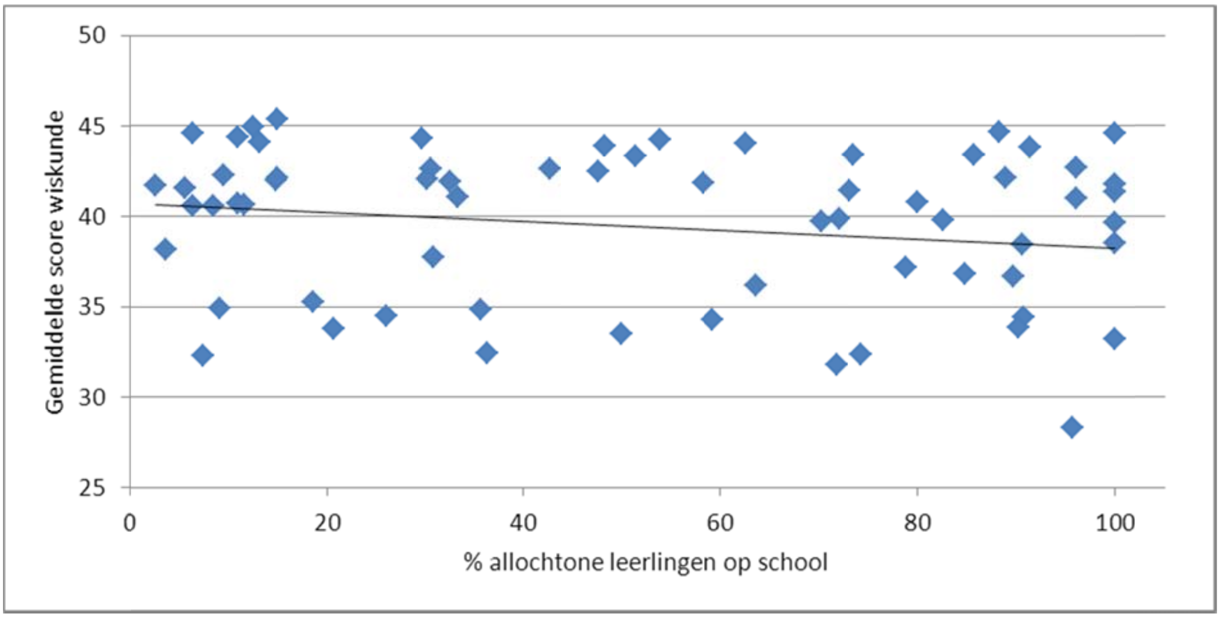


Figuur 5: Gemiddelde scores op wiskunde voor scholen (min = 0; max = 60) naar percentage kansarme leerlingen op school, rekening houdend met individuele sociaal-economische achtergronden van de leerlingen

In Figuur 6 en 7 proberen herhalen we een analoge denkoefening voor de etnische samenstelling van scholen. Meer specifiek willen we nagaan of het percentage allochtonen in een school een invloed heeft op de wiskundeprestaties van de leerlingen. Een allochtoon wordt hier gedefinieerd als iemand waarvan de grootmoeders of de ouders geboren zijn in een niet-West-Europees land. Figuur 6 maakt duidelijk dat er inderdaad een negatieve samenhang is tussen het aandeel allochtone leerlingen op school en de gemiddelde wiskundeprestaties van de leerlingen. Figuur 7 maakt echter duidelijk dat wanneer we rekening houden met de individuele sociaal-economische afkomst van de leerlingen, deze negatieve trend nagenoeg verdwijnt en dus de proportie allochtonen op school niet meer significant samenhangt met de wiskundeprestaties van de leerlingen. Met andere woorden, de sociaal-economische samenstelling van de scholen is veel meer doorslaggevend dan de etnische samenstelling van de scholen.



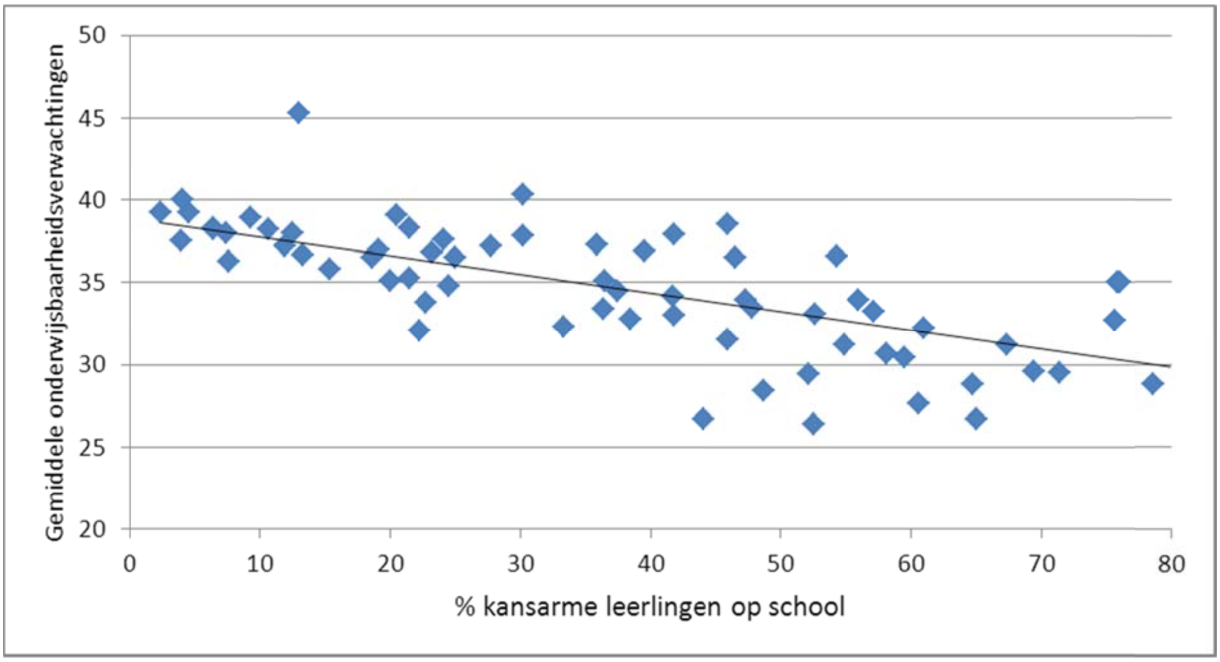
Figuur 6: Gemiddelde scores op wiskunde van scholen (min = 0; max = 60) naar percentage allochtone leerlingen op school



Figuur 7: Gemiddelde scores op wiskunde van scholen (min = 0; max = 60) naar percentage allochtone leerlingen op school, rekening houdend met individuele sociaal-economische achtergronden van de leerlingen (trendlijn niet significant)

4.1.5 Naar verklaringen

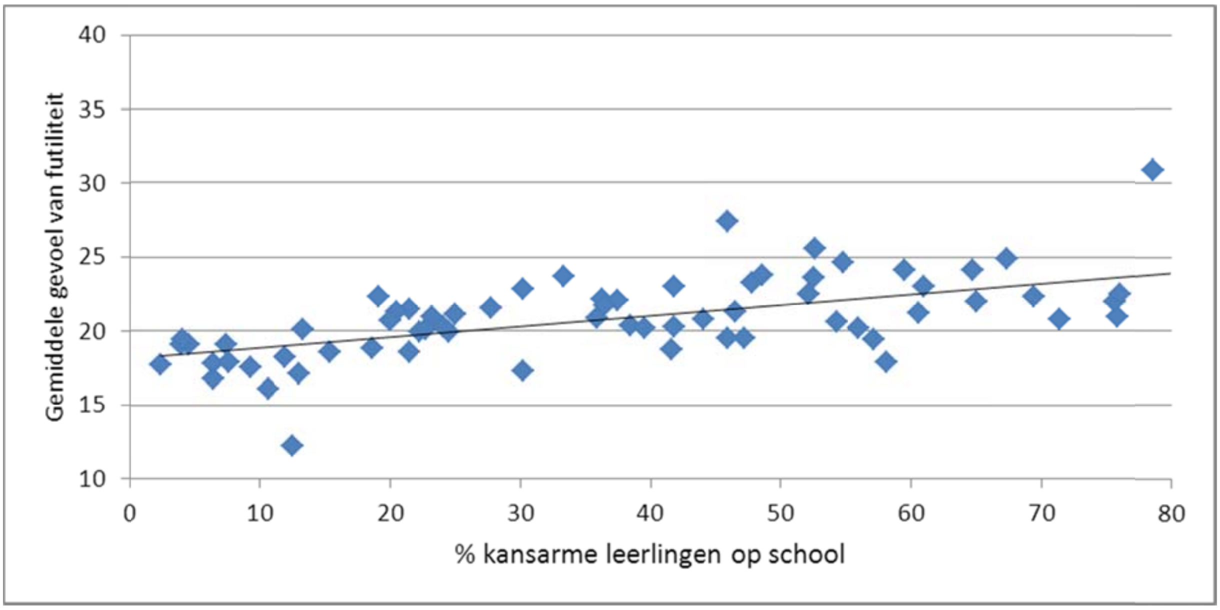
Hierboven hebben we aangetoond dat de sociaal-economische samenstelling van de scholen (percentage kansarme leerlingen) een invloed uitoefent op de wiskundeprestaties van de leerlingen. De vraag is nu hoe we deze invloed kunnen *verklaren*. Als een mogelijke verklaring wijzen onderwijssociologen en sociaal-psychologen vaak in de richting van de leerkrachtenverwachtingen (Rosenthal & Jacobson, 1968; Brophy, 1983). Meer specifiek wordt er gesteld dat wanneer leerkrachten verwachten dat leerling x minder onderwijsbaar en minder capabel is dan leerling y, leerling x uiteindelijk minder goed zal presteren dan leerling y. Het fenomeen is ook wel bekend als het '*Pygmalion-effect*'. Indien de verwachtingen van de leerkrachten in scholen met een hoger aandeel van kansarme leerlingen lager liggen, kan dit dus een invloed hebben op de wiskundeprestaties van de leerlingen. We hebben daarvoor de opvattingen van de leerkrachten over de onderwijsbaarheid van de leerlingen op hun school bevraagd op basis van 31 stellingen over de leerlingen op hun school (bv. *de leerlingen op deze school zijn slim; ,… hebben veel inzicht, leergierig, … kunnen zich goed concentreren, …*) waarbij de leerkrachten op een schaal met vijf antwoordcategorieën moesten antwoorden in welke mate ze akkoord gingen met de stellingen. Hoe hoger hun score, hoe hoger de verwachtingen van de leerkrachten over de onderwijsbaarheid van de leerlingen op hun school. Figuur 8 maakt duidelijk dat hoe meer kansarme leerlingen er op school zijn, hoe lager de onderwijsbaarheidsverwachtingen van de leerkrachten zijn. Onderzoek dat momenteel wordt uitgevoerd door de auteurs moet uitwijzen of deze lagere verwachtingen inderdaad resulteren in lagere wiskundeprestaties.



Figuur 8: Gemiddelde scores van onderwijsbaarheidsverwachtingen van leerkrachten (min = 10; max = 50) per percentage kansarme leerlingen

Anderzijds kunnen de verwachtingen van de leerlingen zelf verantwoordelijk zijn voor lagere onderwijsprestaties. Dit fenomeen is ook wel bekend als het '*Galatea-effect*'. Zo kunnen verwachtingen van leerlingen van een slechte schoolloopbaan en gevoelens van weinig controle over hun onderwijstoekomst – wat wij het gevoel van futiliteit of schoolmoeheid kunnen noemen – een invloed uitoefenen op de wiskundeprestaties van deze leerlingen. Wanneer gevoelens van futiliteit hoger liggen in scholen met een hogere proportie van kansarme leerlingen – al dan niet onder invloed van lagere verwachtingen vanuit leerkrachten – kan dit een verklaring zijn voor het feit dat deze leerlingen minder scoren in zulke scholen. Daarom hebben we de gevoelens van futiliteit nagegaan bij de leerlingen die we bevraagd hebben. Gevoelens van futiliteit werden hierbij gemeten op basis van vier vragen (1-*Voor mensen als ik is er weinig kans dat we in het leven bereiken wat we graag willen, 2-Mensen zoals ik zullen het nooit goed doen op school, zelfs al proberen we nog zo hard, 3-Leerlingen zoals ik hebben geen geluk op school, 4-Op school is punten halen een kwestie van geluk hebben*) waarbij de leerlingen op een schaal met vijf antwoordcategorieën moesten antwoorden in welke mate ze akkoord gingen met deze stellingen. Hoe hoger hun score, hoe hoger hun gevoel van futiliteit.

Figuur 9 maakt duidelijk dat leerlingen in scholen met een hogere proportie van kansarme leerlingen gemiddeld hogere gevoelens van futiliteit hebben. Een recente onderzoekspublicatie van de auteurs heeft uitgewezen dat deze hogere gevoelens van futiliteit bij de leerlingen inderdaad een verklaring kunnen bieden voor het feit dat leerlingen lager presteren in wiskunde in scholen met een hogere proportie van kansarme leerlingen (Agirdag, Van Houtte & Van Avermaet, 2010).



Figuur 9: Gemiddelde scores van gevoelens van futiliteit van leerlingen (min = 10; max = 50) naar percentage kansarme leerlingen op school

4.1.6 Conclusie

Uit dit onderzoek blijkt dat de sociaal-economische achtergrond van de leerlingen een sterke invloed uitoefent op hun wiskundeprestaties: leerlingen uit welgestelde gezinnen scoren beduidend beter dan leerlingen uit kansarme gezinnen. Echter, ook de sociaal-economische achtergrond van het leerlingenpubliek op een school speelt een bijkomende rol: hoe groter de proportie kansarme leerlingen op een school, hoe lager de prestaties gemiddeld zijn. De *etnische* afkomst van een leerling zelf en de etnische samenstelling van het leerlingenpubliek op een school hebben echter geen impact op de wiskundeprestaties van de leerlingen, wanneer we rekening houden met hun sociaal-economische afkomst. Paradoxaal genoeg krijgen etnische factoren duidelijk meer aandacht in het publieke discours – zie bijvoorbeeld de problematisering van 'concentratiescholen' – dan de sociaal-economische factoren die er wél toe doen. We hebben ook bekeken hoe we de impact van de sociaal-economische samenstelling van het leerlingenpubliek kunnen verklaren. Meer specifiek hebben we het belang van leerlingen- en leerkrachtenverwachtingen onderzocht, het zogenaamde *Pygmalion-effect* en *het Galatea-effect*. Onze gegevens wijzen uit dat hogere percentages van kansarme leerlingen op een school samengaan met lagere onderwijsbaarheidsverwachtingen bij leerkrachten en hogere gevoelens van futiliteit bij de leerlingen. Deze twee aspecten kunnen eventueel een verklaring bieden waarom leerlingen slechter presteren in scholen met veel kansarme leerlingen.

4.1.7 Bronnen

Agirdag, O., Van Houtte, M & Van Avermaet, P. (2011) Why Does the Ethnic and Socio-economic Composition of Schools Influence Math Achievement? The Role of Sense of Futility and Futility Culture. *European Sociological Review.* doi: 10.1093/esr/jcq070

Brophy, J. E. (1983). Research on the Self-Fulfilling Prophecy and Teacher Expectations. *Journal of Educational Psychology, 75*(5), 631-661.

Dudal, P. and Deloof, G. (2004). *Vrij centrum voor leerlingenbegeleiding. Leerlingenvolgsysteem. Wiskunde: Toetsen 5 - Basisboek*. Antwerpen: Garant.

Rosenthal, R., & Jacobson, L. (1968). *Pygmalion in the classroom; teacher expectation and pupils' intellectual development*. New York: Holt.

4.2 Kwalitatieve differentiatie in het leerplan van de 1ste graad A-stroom. Hoe kunnen we aandacht besteden aan verschillen tussen leerlingen? Maggy Van Hoof, begeleiding VSKO

4.2.1 Uitgangspunten

Het leerplan wiskunde (VVKSO) voor de A-stroom is herwerkt naar aanleiding van een bevraging van de leraren in 2004-2005 en van de visietekst 1ste graad van het VVKSO. De leraren van de A-stroom van de 1ste graad werden bevraagd over problemen met de beginsituatie van leerlingen (vanuit de basisschool), over de haalbaarheid van het leerplan 1997, over het eventueel niet afwerken van leerstofonderdelen voor bepaalde leerlingengroepen, over de vaardigheden (rekenvaardigheden, meet- en tekenvaardigheden, denk- en redeneervaardigheden, taalvaardigheden en probleemoplossende vaardigheden), over de vakgebonden attitudes (nauwkeurigheid, zelfvertrouwen, doorzetting, kritische zin en reflectie). We hebben dan een antwoord proberen te bieden onder meer door voorstellen te doen over de didactische aanpak (leerling-actieve werkvormen, contextgericht werken, getrapte aanpak, differentiatie …), over het gebruik van leermiddelen in het bijzonder van ICT, over evaluatie (meer aandacht voor procesevaluatie) en over de oriëntering van leerlingen.

Deze voorstellen hebben we in een nieuw leerplan verwerkt dat gevolgd wordt vanaf 1 september 2009 in de vrije secundaire scholen.

4.2.2 Wiskundevorming in de eerste graad

De diversiteit in de samenstelling van de leerlingengroepen in de eerste graad is enorm. De wiskundevorming in de eerste graad geeft een belangrijke aanzet voor de verdere vorming van leerlingen in de bovenbouw en in het hoger onderwijs. Niet alle leerlingen zullen in hun verdere studieloopbaan een richting van doorgedreven wiskunde aankunnen. De basisvorming is er voor iedereen, maar de wiskundig getalenteerde leerling moet ook uitdaging krijgen op zijn eigen niveau. Het is noodzakelijk in de A-stroom van de eerste graad aandacht te besteden aan abstractie en aan formeel werken bij die leerlingen die door dit verdiepend werken worden uitgedaagd.

4.2.3 Competentiedenken

In het leerplan zijn we vertrokken vanuit het competentiedenken. Daarbij gaat het om een breed geheel van vorming, aansluitend bij een aantal algemene competenties en de constructivistische gedachte dat leerlingen best zelf die competenties ontwikkelen. In de vorming worden de verschillende aspecten van kennis, vaardigheden, attitudes en opvattingen geïntegreerd.

We vertrekken in het leerplan van een achttal fundamentele wiskundige competenties die de essentiële aspecten van het wiskundeproces beschrijven.

Enerzijds gaat het over competenties betreffende *het vermogen (en de bekwaamheid) om vragen te stellen en te beantwoorden over en met wiskunde*.

De leerlingen ontwikkelen het vermogen tot:

- wiskundig denken;

- het aanpakken en oplossen van problemen;
- het formuleren van wiskundige argumenten;
- het wiskundig modelleren van situaties.

Anderzijds betreft het competenties die *het vermogen* aangeven *om wiskundetaal en wiskundige hulpmiddelen* in te zetten.

De leerlingen ontwikkelen het vermogen tot:

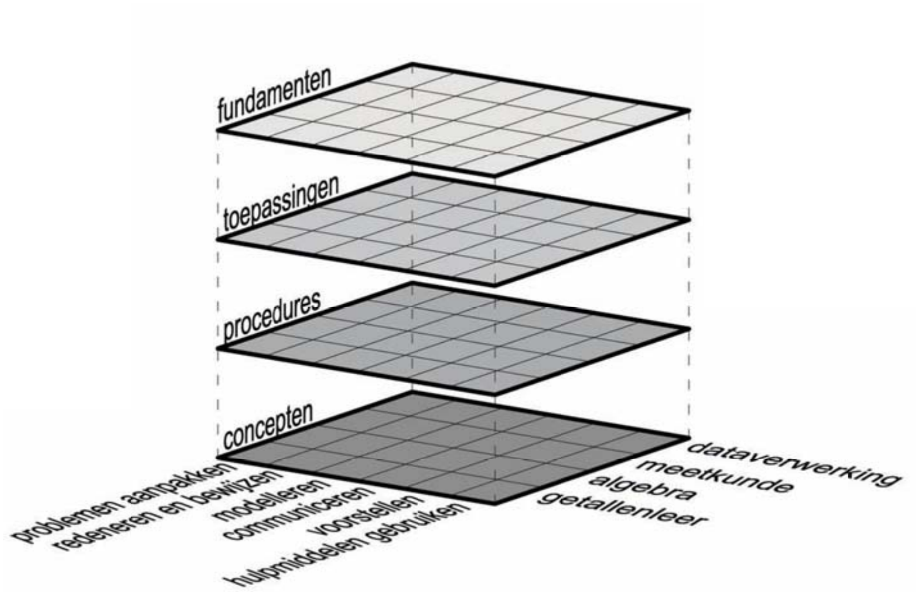
- het representeren van situaties met behulp van wiskunde;
- het hanteren van een specifieke wiskundetaal (o.m. symbolen en formalisme);
- het communiceren in en met wiskunde;
- het gebruiken van hulpmiddelen.

De wiskundevorming in de eerste graad is niet het eindpunt van die vorming. Ze geeft een belangrijke aanzet, maar het vormingsproces moet in de bovenbouw verder gezet worden. Daarbij bestaat dan de keuze tussen een ruime en brede, meer onderbouwde wiskundevorming, waarbij wiskunde dragend vak van die vorming is, of een verdere basisvorming waarbij wiskunde hoofdzakelijk als ondersteunend vakgebied aan bod zal komen.

4.2.4 Meerdimensionale kijkwijzer

In actueel wiskundeonderwijs heeft het geen zin meer om uitsluitend te focussen op de inhoudelijke ordening. Daardoor gaat de kijk op de algemeen vormende aspecten van de wiskundevorming verloren.

In het hierna volgend schema zijn zowel de inhoudelijke als de vaardigheidsaspecten aangegeven. Ze vormen de vezels van een hecht raster wiskunde. Voor de duidelijkheid nemen we competenties als 'wiskundetaal hanteren' en 'communiceren' samen, en nemen we het algemenere 'wiskundig denken' op in de verschillende andere competenties. Merk op dat de vaardigheden, met uitzondering van de leervaardigheden, volledig zijn opgenomen in de competenties.



Het leerplan wil wijzen op de rijkdom van elk kijkpunt uit de kijkwijzer.

De invalshoek vanuit competenties biedt de mogelijkheid om de vele verschillen die in de wiskundevorming (van de eerste graad) mogelijk zijn, een kader te geven. Het raster zal maar sterk zijn als voldoende onderdelen binnen voldoende competenties ontwikkeld zijn. *De gelaagdheid,* die gesuggereerd wordt *in de ontwikkelingsniveaus van wiskunde (concepten, procedures, toepassingen en fundamenten),* laat *inzien dat leerlingen voor een onderdeel al op een hoger niveau* kunnen functioneren en voor een ander niveau nog in de intuïtieve verkenningsfase van concepten kunnen zijn. *Ook voor verschillende leerlingen in een klasgroep zijn verschillende ontwikkelingsniveaus mogelijk.*

Dergelijke interpretatie vraagt een flexibel leerplan en een flexibele interpretatie ervan. Dergelijke interpretatie suggereert dat uitgaande van de bestaande 'kennis' van leerlingen verschillende mogelijkheden bestaan om die te verrijken, bijv. een andere competentie of vaardigheid ontwikkelen, een andere inhoud aanpakken, een ander ontwikkelingsniveau nastreven. *Een wiskundeaanpak zal dus een gedifferentieerde aanpak zijn, voortbouwend op de situatie van de leerling en zijn mogelijkheden.*

4.2.5 Competentieontwikkeling, een werk van lange adem

De wiskundevorming streeft ernaar de fundamentele competenties bij alle leerlingen te ontwikkelen. De ontwikkeling ervan is een opdracht voor het geheel van de vorming (basisonderwijs en secundair onderwijs). Naargelang de keuze die de leerlingen (zullen) maken voor wiskunde, zal competentieontwikkeling met wiskunde al of niet uitgebreider aan bod komen. In de eerste graad kan hiervoor al een belangrijke aanzet gegeven worden. Omdat de klasgroepen meestal heterogeen zijn samengesteld, zal een *evenwicht gezocht worden tussen verwachtingen, mogelijkheden en kansen, waarbij alle leerlingen tot hun recht komen*. *Dat kan bijvoorbeeld in functie van de keuze die leerlingen al of niet willen maken voor wiskunde of in functie van de wiskundige onderbouw die nodig is voor hun vervolgstudie.*

Noodzakelijk voor wiskundige competenties is het bezitten van *een goed georganiseerde basiskennis wiskunde en een aantal technische vaardigheden* (zoals bijv. reken-, meet- en tekenvaardigheid). Ze zijn noodzakelijk maar als geïsoleerde kennis of vaardigheid volstaan ze niet. Ze moeten geïntegreerd ingezet kunnen worden. Toch is het zinvol bij voorbaat het belang van deze basiskennis te onderkennen. Als ze niet aanwezig is, zal ook de competentie niet aanwezig kunnen zijn. Dit verantwoordt echter niet het geïsoleerd werken aan kennisverwerving. Kennis wordt beter verworven doorheen *een actief leerproces.*

Inzicht in de ontwikkeling van competenties geeft aan dat dit maar kan in een geleidelijk ontwikkelingsproces met een groeiend beheersingsniveau in een competentie (kennis, vaardigheid, attitude). Verschillende elementen kunnen op verschillende beheersingsniveaus aanwezig zijn. Zo zullen bepaalde onderdelen voorkomen op verkenningsniveau (als lerende), andere al op een hoger wiskundig niveau (als geroutineerd gebruiker) of op een formeel niveau (als professional of expert).

Voorbeelden

- Rekenvaardigheid met getallen (hoofdrekenen, handmatig rekenen, schatten en gebruik rekenmachine) zou in de eerste graad op het expertniveau moeten aanwezig zijn.
- Bewijsvaardigheid zal in de eerste graad nog volop op verkenningsniveau functioneren.
- Bepaalde begrippen worden in de basisschool op gebruikersniveau ontwikkeld (bijv. vierkant, rechthoek, diagram, grafiek). Als deze begrippen in de verdere wiskundevorming meer formeel moeten functioneren, volstaat een dergelijke benadering niet en moet een bruikbare definitie gegeven worden.

4.2.6 Werken met beheersingsniveaus

Door differentiatie in te bouwen in het leerplan kunnen we beter inspelen op verschillen tussen leerlingen. We hebben gekozen voor een verbredende en verdiepende differentiatie. Dit betekent dat door de keuze en de formulering van de doelstellingen gefocust wordt op het beheersingsniveau van de leerinhouden.

De doelstellingen worden beschreven op drie mogelijke beheersingsniveaus. (Niet voor alle doelstellingen kunnen alle niveaus worden uitgeschreven.)

Een eerste beheersingsniveau wordt *elementair (E)* genoemd en betreft de elementaire kennis die leerlingen eigenlijk *perfect* zouden moeten beheersen. Het is *het absolute minimum.*

Het elementaire beheersingsniveau komt niet in de plaats van het basisniveau. Het geeft een aanwijzing dat het basisniveau, wellicht met heel wat inzet, mogelijk (nog) kan gehaald worden. Het geeft daartoe jammer genoeg geen garantie. Er is nog heel wat inspanning nodig om via extra oefening en ondersteuning bij te benen. Het beperkt blijven tot enkel het elementaire niveau houdt een risico in voor het vervolg van het curriculum.

Voorbeeld

> Doelstelling: *rekenen met gehele getallen*. Dergelijke doelstelling is ruim in te vullen. Afhankelijk van die interpretatie kunnen leerlingen al of niet 'scoren'.
>
> Een *normale* basisoefening hierbij kan zijn: (-2)·5 - 15·(-4) of (-3)·(-8) - 2 (3 - 7).
> Wil een leerling dit soort oefeningen aankunnen, moet hij vlot rekenen met de *elementaire* vormen (-2)·5 of (-3)·(-8) of 5 – (-7), dus het rekenen met *twee* gehele getallen (E).
> Wie dat laatste vlot kan, heeft misschien nog wat problemen met de complexiteit van de basisvormen, maar kan mits oefening die kloof waarschijnlijk wel overbruggen. Wie de elementaire vormen niet aankan, gaat problemen tegemoet.

Het niet beheersen van een doelstelling op elementair niveau geeft wel belangrijke informatie over de leerling. *Zonder deze kennis en vaardigheden kunnen leerlingen in het vervolg van het curriculum wiskunde A-stroom onmogelijk verder. Als leerlingen dit niveau, ondanks goede inzet en zo nodig gerichte remediëring, voor alle onderdelen maar net of onvoldoende aankunnen, dan zijn consequenties in de oriëntering onvermijdbaar*. De capaciteiten van de leerling liggen dan niet op het vlak van studierichtingen met een wiskundige onderbouw. Dan is een positieve keuze voor andere capaciteiten van de leerling aangewezen.

Omdat het elementaire niveau niet in de plaats kan komen van het basisniveau, zal de evaluatie ervan maximaal 20 % van het totaal bedragen.

Het verwachte beheersingsniveau noemen we het basisniveau en betreft de normale realisatie van de basisdoelstellingen, dus zonder ingewikkelde oefeningen en toepassingen. Dit is in principe *het te realiseren niveau voor alle leerlingen.* Het extra aangegeven niveau *'basis'(B)* is meestal een omschrijving van een redelijke begrenzing van de doelstelling.

Voorbeeld

> Doelstelling: rekenen met gehele getallen
>
> (B) De optelling uitvoeren met vijf termen.
> Dit betekent dat een oefening op basisniveau meestal een vijftal termen zal bevatten.

Dit is aangewezen voor een 'normale' evaluatie. Het bereiken van dit niveau zal de meeste tijd in beslag nemen. Ook in de evaluatie zal dit onderdeel het grootste deel uitmaken.
Basisniveau en elementair niveau samen dragen voor minimaal 70 % bij in de evaluatiegegevens.

Het derde beheersingsniveau wordt *verdieping (V)* genoemd. Deze leerlingen kunnen meer aan dan gemiddeld. Ze willen zich in de achtergrond van een aantal wiskundige elementen verdiepen. Ze zijn meer op zoek naar samenhang. Ze kunnen de kennis en vaardigheden vlotter gebruiken in toepassingen. Dit niveau wordt nagestreefd voor alle leerlingen, maar wel vanuit het besef dat dit *niet voor iedereen haalbaar* is. En misschien hoeft dit ook niet. Dat wil zeggen dat we het realiseren van deze doelstellingen kunnen beperken tot *een deelgroep van de leerlingen.* Voor de leerlingen die *dit niveau niet aankunnen of niet graag opnemen*, geeft dit *essentiële informatie* voor de *keuze* in hun *verdere studieloopbaan.*

Voorbeeld

> Doelstelling: vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de vorm x + a = b en a.x = b
>
> (V) Een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke.
> Voor leerlingen vraagt dit een zekere vorm van abstractie.

Naast deze drie beheersingsniveaus worden in het leerplan doelstellingen geformuleerd als *uitbreiding (U)*. De drie niveaus vertonen zeker een stijgende graad van beheersing. In die zin is uitbreiding niet een nog hoger niveau. Op zich kan uitbreiding uitgewerkt worden op verschillende beheersingsniveaus. Zo kan het gaan om een extra leerinhoud, bovenop de normale leerinhouden, maar die niet noodzakelijk is als onderbouw voor het vervolg. Bijvoorbeeld een ander talstelsel of de geschiedenis ervan kan op een basisniveau aangebracht worden bij een deelgroep van de leerlingen, zonder dat voor de andere leerlingen het vervolg van het curriculum geschaad wordt. Het kan uiteraard gaan over inhouden, die meer wiskundige diepgang of hogere vaardigheden vragen. Het kan zijn dat een andere werkvorm gehanteerd wordt, waarbij meer zelfstandigheid gevraagd wordt. En in die zin zegt het iets over het beheersingsniveau waarop die leerlingen met wiskunde omgaan. In het leerplan zijn een aantal suggesties opgenomen. Extra leerinhouden (bijv. historische duiding) kunnen informatief aan alle leerlingen aangeboden worden als deel van het leerproces. Het realiseren en evalueren van uitbreidingsdoelstellingen kan in geen geval aan bod komen als de andere beheersingsniveaus niet gegarandeerd kunnen worden.

4.2.7 Bronnen

Wiskunde, leerplan eerste graad A-stroom, VVKSO D/2009/7841/003 (http://www.vvkso.be/)

4.3 Positief omgaan met verschillen bij het leren in de school en in de klas. Over droom en daad en alles daartussen. Walter Van Dam, Studiegroep Authentieke Middenscholen (St.A.M.)

Deze bijdrage berust op bevindingen van een zoektocht maar ook van een overtuiging en van een confrontatie tussen visie en praktijk. De auteur was achttien jaar lang en tot vrij recent nog directeur van Sint-Maarten Middenschool in Beveren en is tot heden verbonden met het netwerk van middenscholen dat St.A.M. vormt. De tekst focust op het leren in de heterogeniteit van de eerste graad secundair onderwijs maar wil noch een credo noch een dogma aanreiken. Wat hij wel wil doen, kan je lezen in de laatste alinea.

4.3.1 Excellence or equity?

Elk weldenkend onderwijsmens – en wie is dat niet? – droomt ervan om bij het leren maximaal uit elke leerling te halen wat eruit te halen valt. *'Plus est en vous'.* Het is een aloude richtingaanwijzer die het nog altijd doet. Gelukkig maar. En ja, bij getalenteerde leerlingen in bevoorrechte omstandigheden werkt hij meestal nog ook. Maar wat doen we met de anderen, de 'minder begaafden' of zo u wil de 'anders begaafden'? Je kan er immers niet omheen dat leerlingen er in alle maten en soorten zijn. Er zijn er met meer of minder verstand in het hoofd en met meer of minder verstand in de handen en er zijn er zowat in alle gevarieerde vormen daar tussenin. De wereld en de mensen zijn nu eenmaal getekend door veelzijdigheid en complexiteit. Vandaag zegt men overigens ook dat intelligentie meervoudig is en dat de definitie van begaafdheid en beperkingen bij gevolg vele gezichten kent. Die meervoudigheid geldt trouwens evenzeer voor de contexten en specifiek ook voor leeromgevingen die mensen zowel kunnen doen openbloeien als fnuiken in hun groei.

Het is me het kluwen wel. Leraars en scholen zijn dan ook wel eens geneigd te zuchten wanneer ze ermee geconfronteerd worden. Scoringsdrang en evolutionaire ijver doen hen enerzijds inzetten op het stimuleren van de sterken in de soort. Maar andere impulsen – noem ze altruïsme of mededogen of zelfs collectieve overlevingsdrang – doen hen dan weer ijveren voor gelijke kansen. Met een knipoog bekeken lijkt het wel een Darwiniaans dilemma maar het is precies dat spanningsveld dat bewust of onbewust nogal wat onderwijsopvattingen, organisatievormen en discussies in de eerste graad kenmerkt. *Excellence or equity?* Uitmuntendheid ontwikkelen of gelijke kansen bevorderen? Inzetten op het ene lijkt een belemmering voor inzetten op het andere.

Hebben we hier dan te maken met een onoplosbare verscheurende keuze of … kunnen scholen en leraars ook proberen om de beide op hun wenken én waarde te bedienen? M.a.w. moeten en kunnen we ook proberen positief om te gaan met verschillen bij het leren in de school en in de klas, d.w.z. zonder in de onmogelijke en pijnlijke spreidstand terecht te komen die meestal in een al te simpel 'hoog-laag-sterk-zwak'-denken uitmondt en die geneigd is mensen met hoge en lage zelfbeelden en watervallen op te zadelen? Kunnen we bovendien zowel *equity* als *excellence* hun rechten geven zonder in de grijze middelmaat van de nivellering terecht te komen?

Het is een wringende vraag. Authentieke middenscholen kunnen er alvast niet omheen. Ze streven er immers bewust naar om leerlingen in de eerste graad – weliswaar met een terechte organisatorische en pedagogisch-didactische 'scheiding der wegen' tussen A-stroom en B-stroom – twee jaar samen onder hetzelfde schooldak doorheen de nog ruime gemeenschappelijke basisvorming te loodsen. Ze proberen hen ook keuzemogelijkheden op een niet determinerende wijze te laten aftasten en doen hun best om elke leerling op een goed spoor te helpen op het moment waarop in Vlaanderen heuse studierichtingen beginnen (het eerste leerjaar van de tweede graad).

Ze doen dat vanuit de overtuiging dat leerlingen die de basisschool verlaten 'al twaalf maar ook nog maar twaalf' zijn. Prille tieners en ontluikende en zoekende pubers kunnen een oriënterende fase in de voor hen complexere omgeving van het secundair onderwijs heus wel gebruiken. Dat leert ons ook de ontwikkelingspsychologie. Belangstelling is iets wat nog behoorlijk rijpen kan, en het ontdekken en uitklaren van talenten en beperkingen is evenmin een 'now or never'-gebeuren dat na het zesde leerjaar helemaal zonneklaar is. De charmes van de puberteit moeten er bv. nog wel even overheen gaan (en zelfs daarna blijven jong volwassenen en niet weinig volwassenen vaak wel enigszins in 'beweging' vooraleer ze helemaal hun 'ding' vinden).

Authentieke middenscholen willen met hun keuze voor een heterogene school ook een duidelijk maatschappelijk 'statement' plaatsen. Ze willen proberen de school tot een spiegel van de samenleving te maken. En of je dat nu wil of niet: de samenleving is verscheiden. Verschillen binnenhalen in de school biedt dus kansen om jongeren daarop voor te bereiden en hen een dubbel kompas aan te reiken: het morele en maatschappelijke kompas van het willen samenleven en samen leren in verscheidenheid maar ook het kompas van de vaardigheden om zowel met jezelf als met de anderen op weg te kunnen gaan. Ontwikkeling van talenten in veelzijdigheid en gelijkwaardigheid met kansen voor elke leerling: zo klinkt dat dan in slogantaal.

Mooie, zoete droom. Maar hoe geef je al die verschillen in de school en de klas een plaats bij wat uiteindelijk toch de onomstootbare kerntaak is van de school: het leren? Met verzandmannen in dromen kom je er niet uit. Het is dus piekeren en zoeken geblazen, de automatische leerpiloot voorbij. Er zijn immers wel wat schoolse leerbeslommeringen aan de orde. Hoe groepeer je de leerlingen? Hoe benader je de gemeenschappelijke doelen en leerinhouden die je via eindtermen en leerplannen van de eerste graad aangeboden worden zodanig dat het bonte gezelschap ermee overweg kan en het leren ook tot gunstige resultaten leidt volgens ieders mogelijkheden? Hoe organiseer je het lerend handelen in de klas?

4.3.2 Homogeen of heterogeen?

In Vlaanderen is de praktijk van een homogene of een heterogene klassamenstelling in de A-stroom van de eerste graad nog al te vaak stof voor emotioneel vertekende discussies die niet vrij van historisch beladen vooroordelen zijn. Enige sereniteit zou geen kwaad kunnen. Heldere definities van de begrippen evenmin. De inbreng van onderzoek kan daartoe bijdragen. Al was het maar om te leren dat het begrip 'homogeen' of 'heterogeen' veel gezichten kan hebben, dat er niet altijd eenduidige antwoorden zijn m.b.t. de effecten van diverse klasgroeperingsvormen en dat men uiteindelijk in de school keuzes moet maken waarbij men meer voordelen dan nadelen genereert en tegelijk accepteert dat er altijd ook wel ergens knelpunten zijn. Als school zou men vandaag in elk geval ook op dit vlak en meer dan ooit moeten weten waarvoor men staat in het debat over talenten en gelijke kansen. Een mooie aanzet tot denkwerk en verder onderzoek is alleszins de VLOR-publicatie (Belfi, De Fraine & Van Damme. 2010) *'De klas: homogene of heterogene setting'*

Wat wij in alle bescheidenheid in dit artikel vanuit praktijkervaringen kunnen aanreiken is dat homogene groepering in de A-stroom van de eerste graad in Vlaanderen vaak betekent dat men cognitief sterkere bollebozen samenzet in een al dan niet expliciet zo genoemde ASO-setting en dat men de vanuit dat oogpunt vaak als 'zwakker' omschreven leerlingen in een eerder 'technische' setting groepeert. De eersten schieten meestal in een zesjarige raket bachelor- en zelfs eerder nog mastergewijs hemelwaarts en doen ons in internationale rankings terecht een hoge borst opzetten. Jammer dat er onderweg wel eens hier en daar en soms wat al te vaak iemand uit de raket valt en het afwijzende gevoel van vallen moet incasseren, ook al spreekt men daarbij troostende en stimulerende woorden. Hij of zij landt dan gewoonlijk in de tweede groep. Bij dezen bestaat dan weer de neiging om 'die van de technische' met enige bekommernis, die echter ook wel eens neigt naar meewarigheid, te behandelen als inderdaad 'die van de technische' waaraan je op een aantal vlakken (of zijn het sommige vakken?) niet al te hoge verwachtingen mag koppelen. De zorg van het technisch onderwijs om de leerlingen met de juiste profielen in een aantal zgn. 'sterkere' technische richtingen in de tweede graad aan te trekken en kansen te geven is er niet steeds mee opgelost. Het soms wat minnetjes-(zelf)beeld van 'die van de technische' wordt er evenmin mee verbeterd, hoezeer ook technische scholen op zeer veel vlakken wel degelijk de waarde van hun project en vorming met terechte fierheid uitdragen.

Zullen we dan maar in de eerste graad opteren voor een heterogene school met heterogene klassen en met een breed oriënterend spectrum waarin de leerlingen zichzelf en hun interesses en kwaliteiten en grenzen 'vrolijk fluitend' kunnen uitklaren vooraleer ze goed weten wat ze willen en kunnen? En hoe zouden die heterogene klassen in de A-stroom (in de B-stroom dient de heterogeniteit zich wel vanzelf aan) dan moeten samengesteld worden? Hanteerbaar en evenwichtig, zeggen ervaringsdeskundigen uit de praktijk van authentieke middenscholen. Alsof het uitvoeren ervan een sinecure zou zijn. Dat is het niet. Criteria als o.a. schoolresultaten en hun interpretatie, geslacht, leerstoornissen, gedrags- en/of socio-emotionele zorgen en individuele wenselijkheden moeten immers in de weegschaal gelegd worden om klassen te maken die uiteindelijk – en wat leren betreft – een gezonde verhouding 'kop-midden-staart' hebben. Keuzevakken en opties mogen daarbij geen beletsel zijn: voor de gemeenschappelijke basisvorming leren de leerlingen samen, voor specifieke keuzevakken volgen ze les met hun keuzegenoten.

En wat zijn dan de bevindingen uit de (in Vlaanderen niet algemeen verspreide) praktijk? Dat met deze werkwijze alleszins een grote groep leerlingen uit vooral het 'midden' in dergelijke leeromgevingen uitgedaagd wordt om meer uit hun kannetje te halen en daar ook in slaagt. Dat men als leraar in een dergelijke klasomgeving wel degelijk alert moet zijn om de 'kopgroep' niet als een lerende vanzelfsprekendheid te beschouwen en dat men deze 'snelle slimmeriken' voldoende prikkels moet blijven geven en af en toe zelfs leerzaam als leercoach voor anderen moet weten in te zetten. Dat het zelfbeeld van de zwaksten bijzondere zorg vraagt. Maar dat laatste blijkt uiteindelijk in elke setting te gelden, net als overigens wat we de 'chemie' van de klas zouden kunnen noemen die, om het helemaal ingewikkeld te maken, ook nog eens een 'chemie' van de interactie leraar – leerling – klasgroep is. Lesgeven in een heterogene klas vraagt alleszins nogal wat didactische vaardigheid en kwaliteiten van een leraar. Het *'plus est en vous'* geldt hier ook voor hem of haar. Maar ervaringen leren dat dit niet per sé een historie van taak-overbelasting maar eerder een kwestie van taakspanning en –welbevinden kan zijn waarbij de vorming van de leraar, de ondersteunende rol van de schoolleiding én een sterke teamwerking echter niet onbelangrijk zijn.

4.3.3 Kwalitatieve differentiatie

De keuze voor een brede gemeenschappelijke basisvorming in de eerste graad, die in Vlaanderen trouwens decretaal verankerd is, is een keuze voor het aanleren van een gemeenschappelijke 'taal' van kennis, vaardigheden en attitudes waarin verschillen in de samenleving elkaar zullen kunnen blijven ontmoeten. Het is tegelijk het creëren van een stevige laag potgrond in de eerste twee jaren secundair onderwijs waarin verschillende kiemen geleidelijk verschillende soorten plantjes zouden moeten kunnen worden. Gemeenschappelijke eindtermen en leerplandoelen zijn dus onmiskenbaar een zinvol gegeven. Maar dat leerlingen verschillend zijn kan niet ontkend worden en dat vraagt om alweer wat pieker- en zoekwerk om de vertaalslag naar de klas te kunnen maken.

Ga je sommige leerlingen – de 'sterken' - bovenop de basisdoelen meteen een trits andere doelen aanbieden? Kwantitatieve differentiatie? Basis en meer? Basis en uitbreiding? Wie meent dat de eerste graad een brede en oriënterende ingroeigraad is die kansen moet verschaffen om nog meerdere wegen open te houden staat daar wat huiverig tegenover. Voorafnamen op de tweede graad en al te vroegtijdige curriculumdifferentiatie worden immers best vermeden als je het trapjesdenken en de waterval probeert te bannen uit het studiekeuzeproces dat jonge tieners stapsgewijs naar een studierichting op eigen maat wil loodsen. Maar dat wil niet zeggen dat er geen nood aan differentiatie zou bestaan.

Een antwoord op dit probleem is de laatste jaren o.a. via een herbronning in vier opeenvolgende middenscholencongressen maar ook in echo's daarbuiten gegroeid. De visietekst over werken in de eerste graad van het VVKSO en de aansluitende actualisering van sommige leerplannen van deze koepel bv. wijst in die richting. De publicatie ter gelegenheid van een kwart eeuw middenschools denken en werken, *'Positief omgaan met verschillen in de leeromgeving'* (Vanderhoeven, 2004) heeft dan weer geprobeerd een kader te schetsen en aanzetten te bieden tot verder denken en handelen. Het begrip 'kwalitatieve differentiatie' is daarin opgedoken en werd opmerkelijk geponeerd en via de vermelde congressenreeks mee getoetst aan de praktijk als een middel om de leerinhouden te benaderen via verschillende beheersingsniveaus t.o.v. de gemeenschappelijke basisvormingsdoelen. Basis en verdieping.

Basis kan omschreven worden als het niveau van beheersing van de gemeenschappelijke doelen dat van elke leerling in de A-stroom mag verwacht worden. Het geactualiseerde VVKSO-leerplan wiskunde parafraserend kunnen we stellen dat het basisniveau de normale realisatie van de basisdoelstellingen betreft, dus zowel het elementaire minimum dat elke leerling perfect zou moeten beheersen als de basis die vrij is van ingewikkelde oefeningen en toepassingen en waarvan mag verwacht worden dat elke leerling die op voldoende wijze beheerst. In dit geval gaat het meestal om geheugenkennis (feiten en procedures kennen en herkennen) of om het routinematig en in herkenbare situaties toepassen van wat als vaardigheid of procedure in de klas aangeleerd werd. Verdieping is dan het niveau dat verder gaat dan het gemiddelde. Dezelfde leerplandoelen worden daarbij benaderd via moeilijker toepassingen en oefeningen waarbij betekenis moet gegeven worden aan nieuwe informatie of waarbij varianten op wat in de klas gezamenlijk werd aangeleerd probleemoplossend moeten kunnen aangepakt worden.

In een leermodel met kwalitatieve differentiatie wordt het verdiepingsniveau ook nagestreefd voor alle leerlingen maar dit wel vanuit het besef dat dit niet voor iedereen of – belangrijke nuance! – voor iedereen bij elk leerstofonderdeel haalbaar is of moet zijn. Het aanbieden aan elke leerling van prikkels en kansen is immers de wenselijkheid, maar ook het besef dat 'sterk-zwak' iets genuanceerder en bewegend is dan men vanuit een eerder categoriale blik wil veronderstellen. Want … een leerling 1^{e} jaar met keuzevak Latijn zou normalerwijze voor taalbeschouwing wel een bolleboos met hoge scores voor basis en verdieping kunnen zijn (dat zou je toch mogen verwachten) maar op het vlak van communicatief taalgebruik zou het best wel eens kunnen dat hij/zij eerder op een basisniveau te situeren valt. Of die ene leerling met eerder technische keuzevakken zou voor Nederlands best wel eens verdieping blijken aan te kunnen terwijl dat voor bepaalde onderdelen van wiskunde dan weer niet het geval is. En zo kan ieder met enige kijk op kinderen in de eerste graad zich wel meer levende variantvoorbeelden voor de geest proberen te halen en zich realiseren dat nuance de lerende jongere tekent en dat we die omwille van onze strak afgelijnde leerorganisatie met onderwijs voor de 'enen' en onderwijs voor de 'anderen' wel eens uit het oog dreigen te verliezen. Kwaliteiten en beperkingen zijn niet voor iedereen even eenduidig als ze lijken.

Een model met kwalitatieve differentiatie nodigt in elk geval de leraar uit om leerdoelen en –stof te vrijwaren van een nivellerende benadering waarin de verschillen niet erkend en eerder afgebot worden. De leraar Nederlands die wil nagaan of en hoe zijn of haar leerlingen een krantenbericht begrijpend kunnen lezen kan bv. leesvragen serveren waarop het antwoord letterlijk uit de tekst kan gehaald worden samen met vragen waarbij de lezer in staat moet zijn om tussen de regels te lezen en met eigen woorden te verwoorden. Basis en verdieping. En ook voor de leraar wiskunde of de leraar aardrijkskunde of die van natuurwetenschappen (en ga zo maar het hele rijtje af) kan het kijken naar de eigen materie, de toepassingen en toetsen door deze dubbelglazige bril bijzonder verhelderend blijken. In zoverre ze dat nog niet hebben gedaan, raden we leraars wiskunde overigens aan om een indringende blik te richten op het recente VVKSO-vakleerplan voor de eerste graad.

4.3.4 Kwalitatieve differentiatie en de leraar

Wie in de heterogeniteit van de klas aan de slag wil met een basis-verdiepingsmodel ontdekt dus beslist interessante mogelijkheden maar stuit ook op hinderpalen (of noemen we ze als geboren optimisten liever ‘uitdagingen’?).

Vooreerst zijn er de leerplannen. Niet alle bieden leerplannen differentiërende helderheid. Zelf nadenken over de vertaling van soms vage leerplandoelen naar basis en verdieping is dan de opgave. Taxonomische modellen zoals bv. dat van Romiszowski (Vanderhoeven, 2004) kunnen in zo’n geval behulpzaam zijn, maar het samen denken in vakgroepverband met concreet leermateriaal op de tafel is dat nog meer, zoniet zelfs onontbeerlijk en stimulerend.

Het leermateriaal is dan weer een ander paar mouwen. Er zijn nogal wat leermiddelenmakers die de eerste graad bestoken met A- en T-boeken en met alle mogelijke creatieve varianten waarbij ingespeeld wordt op het bestaan van twee soorten leerlingen in twee soorten eerste graden. Dat deze commerciële ondernemingen hierdoor niet bepaald het inbrengen van gedifferentieerd leermateriaal in dezelfde klas faciliteren moge duidelijk wezen. Gelukkig zijn er nog nobele uitzonderingen en vooral ook durvers: moedige vakleraars en vakgroepen die dan maar zelf hun leermateriaal aanpassen en aanpakken. Maar misschien moeten uitgevers toch ook wat meer gaan durven en creatieve marketeers worden die niet alleen inspelen op de markt zoals ze menen dat die is, maar die ook een markt durven creëren voor de niet geringe maar vaak al te zwijgende groep van leraars en scholen die differentiatie in de klas als een toenemende nood aanvoelen. En die situeren zich heus niet alleen in middenscholen. Bovendien zou het zinvol zijn dat bij het ontwerpen van leermiddelen ook kan vertrokken worden van een duidelijke visie op inhoudelijke differentiatie, wat nu vaak niet het geval is.

Bij het werken met beheersingsniveaus kom je als vanzelf uit bij de nood aan binnenklasdifferentiatie. Bij leraars, die vaak worstelen met grote of drukke of moeilijke of andersoortige klassen, doet die didactische term wel eens wenkbrauwen fronsen. Binnenklasdifferentiatie vraagt immers nogal wat creativiteit en flexibiliteit en of je je lieverdjes daar altijd gemotiveerd en hard werkend en zelfstandig in kunt meekrijgen, is een niet onbelangrijke vraag. Anderzijds moet het begrip toch ook ontdaan worden van de overtrokken voorstellingen die tot fronsen leiden. Niet elke seconde van elke les, laat staan elke minuut of elk kwartier, vraagt om differentiatie, ook niet in heterogene klasgroepen. Gezamenlijke instructiemomenten en differentiërende toepassingsmomenten zijn geen tegengestelden maar moeten en kunnen elkaar naadloos aanvullen. Het gebruik van diverse werkvormen en de didactische organisatie van de interactie leraar-leerling en leerling-leerling en leerling-klasgroep is evenmin een ‘of’-verhaal maar wel degelijk een ‘en’-gebeuren: docerend lesgeven en het toepassen van andere werkvormen (coöperatief leren, hoeken- en contractwerk, de vele varianten van begeleid zelfstandig leren, en zo verder) moeten op de eerste plaats gekozen kunnen worden in functie van de doeltreffendheid en de omstandigheden en niet omwille van het principe. Een leraar met een goed inzicht in zijn/haar klasgroep voelt dit met de ellebogen aan. Dit betekent dan weer niet dat men geen aandacht moet besteden aan de draagkracht van de ellebogen. Lerarenopleidingen, begeleidingsdiensten en schoolleiders hebben op dit vlak een niet geringe verantwoordelijkheid en opgave. Het is dan ook goed te kunnen vaststellen dat hier en daar lerarenopleidingen en pedagogische begeleidingsdiensten vandaag hun oor te luisteren leggen bij ervaringsdeskundigen – zeg maar, scholen en leraars die zoekend het pad van binnenklasdifferentiatie zijn opgegaan – om in een wisselwerking te kunnen treden tussen praktijk en ondersteuning van de praktijk. Het vermogen om te differtentiëren van de leraars van vandaag en morgen kan maar toenemen als het goed gevormd en begeleid kan worden

Ondersteuning van de lerarenpraktijk is overigens ook een opdracht voor schoolleiders. Niet dat leraars alle heil mogen en moeten verwachten van hun directeurs en de pedagogische omkadering in de school maar zonder de inspiratie én organisatie van de school kan ook de meest ondernemende en welwillende leraar een eiland op drift worden. Het bevorderen van vakgroepwerking via bv. een tijdelijke en projectmatige ondersteuning in niet-lesgebonden uren leraar of via faciliteiten in het lessenrooster van leraars en via duidelijke en met de groep steeds weer overlegde doelen helpt. Kiezen om een aantal lesuren aan te wenden om bv. teamteaching mogelijk te maken (één uur per week komen voor een bepaald vak twee leraars in de klas om de differentiatie extra vleugels te geven) i.p.v. een klasgroep één of anderhalve eenheid kleiner te maken door een bijkomende klasgroep te maken, is een ander voorbeeld. Schoolleiders die resoluut durven kiezen voor het werken met kwalitatieve differentiatie én tegelijk voor de stem en betrokkenheid van hun leraars bij de praktijk en organisatie ervan ervaren dat veel mogelijk is en wordt.

4.3.5 Kwalitatieve differentiatie en evaluatie

Genuanceerd tegemoetkomen aan de verschillen bij het leren in de klas is mooi. Maar moet en durf je ook de verschillen vaststellen en leerlingen leren omgaan met zowel hun mogelijkheden als … hun grenzen? Durf en kan je aan een leerling bv. zeggen dat zijn of haar Frans voldoende is op het basisniveau maar dat vanuit de ervaringen met verdieping duidelijk is geworden dat er in hem of haar geen talig talent van jewelste schuilt en dat daar best rekening mee gehouden wordt in het vervolgtraject? Of gooi je alle bevindingen op een hoop zodat het niet altijd zo helder is wat dat ene cijfer betekent en vooral wat je ermee aan moet?

Werken met basis en verdieping heeft in feite maar zin als je de beheersingsniveaus basis en verdieping (al dan niet zelfs per leerstofonderdeel) evalueert, in kaart brengt en rapporteert. Een zorgvuldige interpretatie van de bevindingen is echter even belangrijk net als de toelichting ervan in wijze en stimulerende woordcommentaren en gesprekken met leerling en ouders. Waar én waarom zijn de basisbeheersing en het verdiepingsniveau (on)voldoende of zeer goed of zwak? Welke beperkingen moeten leraar en leerling onder ogen zien? Waaraan kan gewerkt worden en hoe? En vooral: wat zijn de sterke kanten van de leerling die als troeven moeten uitgespeeld worden als er bv. een studiekeuze wordt gemaakt op het einde van de eerste graad en … welke indicatoren zijn er om andere studiekeuzes beter te vermijden?

Evaluatie en rapportering van beheersingsniveaus kunnen dan ook niet losgemaakt worden van die andere belangrijke opgave van de eerste graad: de leerling laten groeien in studiekeuze.

4.3.6 Kwalitatieve differentiatie, studieloopbaanbegeleiding en oriëntering

Een keuze maken voor een studierichting van de tweede graad kan niet overgelaten worden aan improvisatie noch een gebeuren zijn dat pas zijn gang gaat in juni van het tweede jaar van de eerste graad. Een gestructureerd en geleidelijk opgebouwd traject van studiekeuzebegeleiding zou in het curriculum van de leerling vanzelfsprekend moeten zijn en scholen dienen hierin hun verantwoordelijkheid op te nemen. Dit gaat verder dan enkele infomomenten over studierichtingen. In zo'n traject moet de leerling immers geleidelijk keuzevaardiger kunnen worden en dienen 'leren leren' en 'leren kiezen' hand in hand te kunnen gaan. Kansen krijgen om belangstellingen te verkennen en te verduidelijken is daarbij één element, maar ook het verwerven van inzicht in vervolgwegen én … in zichzelf als leerling. Bij dat laatste kunnen beheersingsniveaus en een stimulerende interpretatie ervan door de leraar bijzonder behulpzaam zijn. Aansluitend zouden ze dat ook moeten zijn wanneer leraars predelibereren en delibereren. Op het einde van de eerste graad is dat geen geringe opgave: de klassenraad draagt er de verantwoordelijkheid om de studiekeuzegroei en voorlopige keuzes van leerling en ouders aan te vullen met een oriënterende beslissing middels een attest en een advies. Zal je dus de leerling die voor wiskunde goede basisresultaten heeft behaald over het geheel van de twee jaren maar volgens de verdiepingsgegevens niet zo'n hoogvlieger blijkt te zijn en een onvoldoende behaalt, adviseren om geen studierichting met 5 uur wiskunde te volgen of … kan je die ook clausuleren? En hoe zit dat in het samenspel met de andere vakken? Het inbrengen van beheersingsniveaus in een deliberatie blijkt bijzonder prikkelend en vaak verhelderend te zijn, tenminste wanneer er duidelijke deliberatieprocedures zijn, wanneer leraars een professioneel en dus degelijk inzicht hebben in de vervolgwegen en … wanneer ze in vakgroepverband goed hebben nagedacht over hun evaluatie en de interpretatie ervan.

Het moment van oriëntering waarbij alle draden van het tweejarige proces samenkomen – leren in heterogeniteit, beheersingsniveaus en binnenklasdifferentiatie, evaluatie en rapportering, studiekeuzebegeleiding en –betrokkenheid – is ook een ultiem ontmoetingsmoment met de ouders. Maar dat kan en mag niet het enige ontmoetingsmoment zijn. Ouders bewust maken dat ze mede-actoren kunnen zijn en hen dus aantonen met meer dan wat gladde reclameboodschappen dat een dergelijke schoolvisie en –praktijk hun prille tieners ten goede zouden kunnen komen op het vlak van leren en studiekeuzes is een continu proces. Het begint bij de eerste contactnamen met de school en is een traject waarin zowel algemene als individuele info- en gespreksmomenten hun plaats moeten krijgen. Het veel gehoorde argument dat ouders (en bij gevolg de samenleving) traditioneel, eerder categoriaal en zelfs conservatief denken als het op de schoolloopbaan van hun kind aankomt, wordt vaak iets te gemakkelijk gebruikt om het discours over de eerste graad te bevriezen. Ook hier leren praktijkervaringen echter dat ouders wel degelijk oor hebben naar een benadering die hun nog jonge kinderen de noodzakelijke groeimarge en een gezond zoekend zelfvertrouwen probeert te gunnen.

4.3.7 Hoera?

Biedt het werken met kwalitatieve differentiatie in de eerste graad dan eindelijk de wonderoplossing waarmee we in de verscheidenheid onze leerlingen op maat kunnen bedienen? De inleiding van deze tekst maakte het reeds duidelijk: dit is geen dogmatische tekst en wondermiddelen bestaan niet maar moeten elke dag weer gemaakt worden. Papier of digitale tekstdragers zijn bovendien verduldig en ontberen woord en wederwoord die kunnen verduidelijken wat echt bedoeld wordt of die vooral voldoende praktijkbevindingen ter illustratie en geloofwaardigheid kunnen aanreiken. Dit relaas is echter wel gebaseerd op ervaringen in het (midden)schoolse veld en geïnspireerd vanuit die inderdaad hardnekkige queeste naar een verzoening van veelzijdige en volwaardige talentontwikkeling met gelijke kansen. In die zin wil het praktijkmensen uitdagen, prikkelen tot nadenken en vooral tot proberen … En dat zou al heel wat zijn. Een zich ontwikkelend secundair onderwijs dat vanuit analyses van zijn sterkten en zwakten en via een oriëntatienota vandaag al naar morgen kijkt, slaagt immers maar als het in de klas kan gebeuren. En in de sleutelrol die de eerste graad daarbij nog duidelijker dan vandaag wordt toebedeeld zal de sleutel maar draaien als de sloten van de vele klasdeuren in Vlaanderen niet knarsen.

4.3.8 Bronnen

Belfi, B., De Fraine, B. & Van Damme, J., *De klas: homogene of heterogene samenstelling?* Acco, 2010

Vanderhoeven, J.L., *Positief omgaan met verschillen in de leeromgeving*. Garant, 2004.

Meer informatie over St.A.M.: www.stam-vlaanderen.be

4.4 Resultaten van de peiltoetsen eerste graad A-stroom bekeken vanuit het perspectief van de basisopties. Emile Claeys, begeleiding VSKO

4.4.1 Inleiding

De voorbije schooljaren werden door de Vlaamse overheid peilingen uitgevoerd om na te gaan in welke mate de eindtermen basisvorming bereikt werden. In de A-stroom van de eerste graad van het secundair onderwijs werden volgende peilingen uitgevoerd: informatieverwerving en –verwerking (mei 2004), biologie (juni 2006), Frans (mei - juni 2007), wiskunde (mei 2009).

De analyse van de resultaten leert dat de optiegroep klassieke talen systematisch het hoogst scoort. Als buitenstaander kan dit opvallend lijken omdat ‘Informatieverwerving en –verwerking’, ‘Biologie’ en ‘Wiskunde’ niet tot het extra verkennende karakter van de basisopties Latijn en Grieks-Latijn behoren. De verklaring hiervoor kennen we maar al te goed. Leerlingen die zeer goed presteren in het basisonderwijs komen bijna automatisch terecht in deze twee basisopties. Aan de andere kant van het spectrum vinden we de technisch georiënteerde basisopties. Deze opties scoren bijna allemaal systematisch lager. De basisoptie ‘Industriële wetenschappen’ is de uitzondering. Voor informatieverwerving en -verwerking, biologie, wiskunde scoort deze optiegroep opvallend beter dan de andere technisch georiënteerde basisopties.

Algemeen kunnen we uit deze resultaten besluiten dat de basisopties op vandaag een selectiemechanisme zijn om leerlingen te selecteren op basis van ‘intelligentie’ en niet op basis van interesses of specifieke talenten.

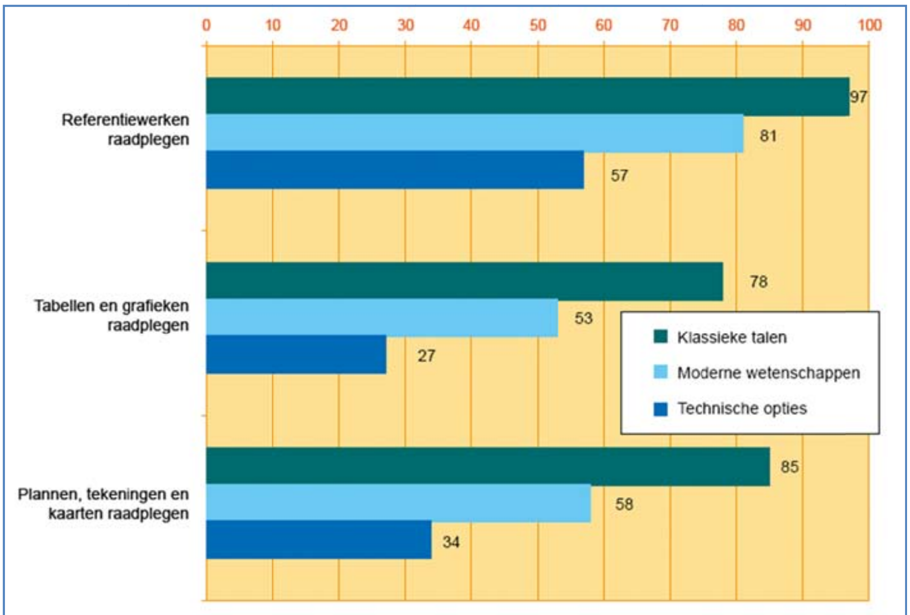
Anderzijds kunnen we ons de vraag stellen waarom in sommige technisch georiënteerde basisopties zo veel leerlingen zo slecht scoren. In vele gevallen haalt de helft van de leerlingen niet eens het minimale beheersingsniveau van de eindtermen.

4.4.2 Analyse van de peilingsresultaten vanuit het perspectief van de basisopties

Het systematisch lager scoren van leerlingen in technisch georiënteerde basisopties is een constante bij de vier uitgevoerde peilingen. In de brochures van de Vlaamse overheid die horen bij de peilingsresultaten lezen we daarover het volgende:

Peiling informatieverwerving en -verwerking (p.20)

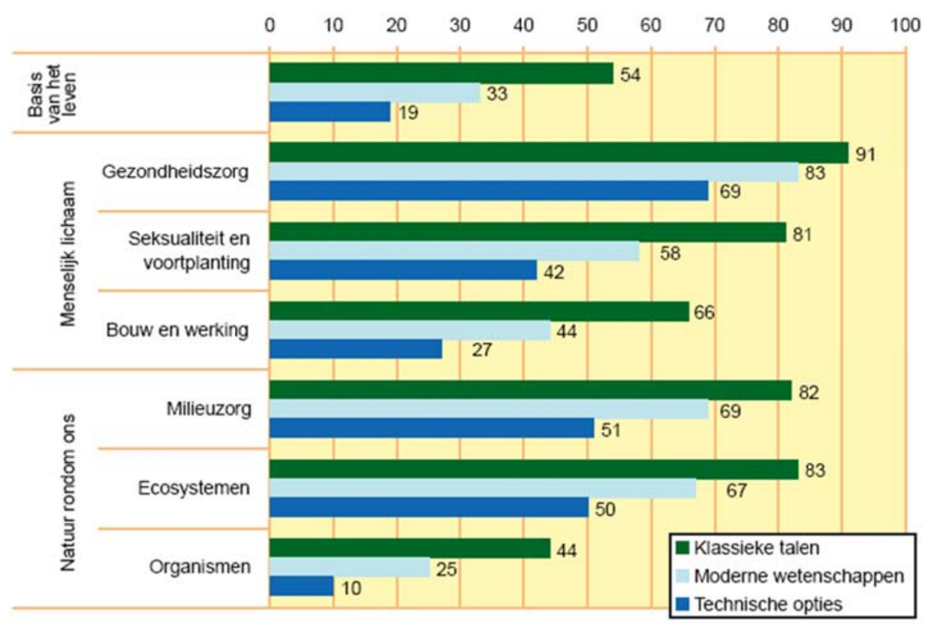
“… Voor de optiegroep klassieke talen behaalt de overgrote meerderheid van de leerlingen de eindtermen voor de drie toetsen. De resultaten van de leerlingen uit de basisoptie moderne wetenschappen lijken sterk op de resultaten van de totale groep. Leerlingen uit de technische opties behalen de eindtermen in mindere mate. Daarbij moet echter worden opgemerkt dat deze optiegroep bestaat uit een zeer heterogene groep leerlingen. Zo presteerden bijvoorbeeld de leerlingen uit de basisoptie industriële wetenschappen samen met de leerlingen uit de basisopties klassieke talen beduidend beter dan hun jaargenoten voor referentiewerken en plannen, tekeningen en kaarten. …”



Figuur 5 - Percentage leerlingen dat de eindtermen haalt opgesplitst naar optiegroep

Peiling biologie (p.30)

“…Leerlingen uit de technische optiegroep scoren gemiddeld lager dan de leerlingen die de basisoptie moderne wetenschappen volgen. De leerlingen uit deze laatste optiegroep scoren dan weer lager dan de leerlingen uit de optiegroep klassieke talen.…”

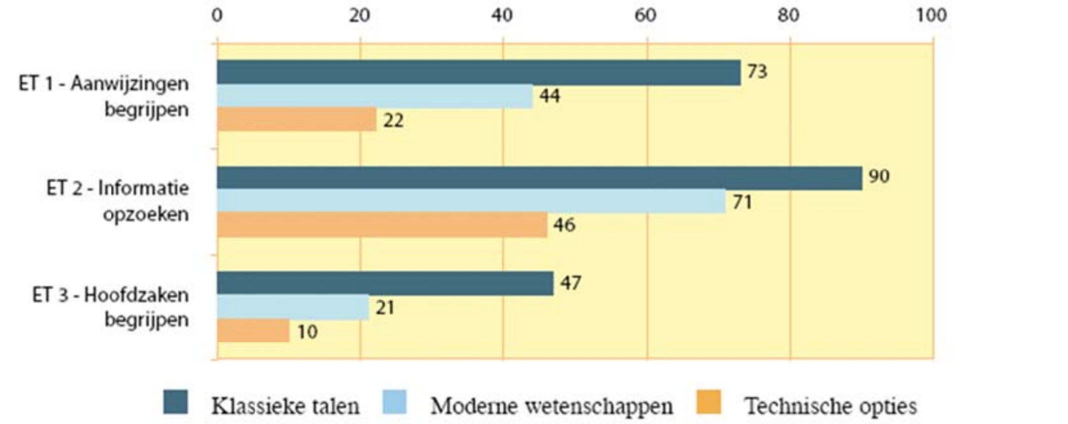


Figuur 9 – Percentage leerlingen per optiegroep dat de eindtermen haalt.

Peiling Frans

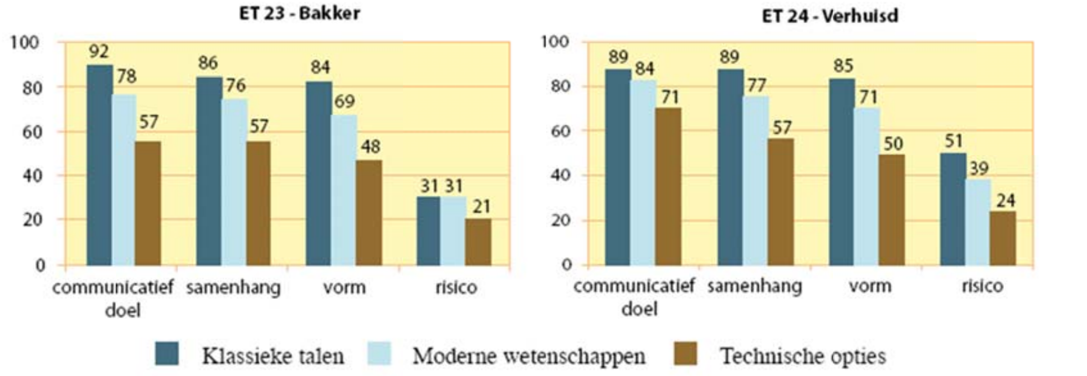
Lezen (p.33) “… Leerlingen uit technische opties scoren gemiddeld lager dan leerlingen die de basisoptie moderne wetenschappen volgen. De leerlingen uit de optiegroep klassieke talen scoren over het algemeen hoger dan de andere…”

Luisteren (p.36) “…Leerlingen uit de technische opties scoren gemiddeld lager dan leerlingen die de basisoptie moderne wetenschappen volgen. Leerlingen uit de optiegroep klassieke talen scoren over het algemeen hoger dan de andere…”



Figuur 18.1 – Percentage leerlingen per optiegroep dat de eindtermen Frans luisteren haalt

Schrijven (p.43) “…De schrijfproducten van de leerlingen uit de optiegroep klassieke talen zijn doorgaans beter voor de verschillende globale criteria dan de schrijfproducten van de leerlingen uit moderne wetenschappen. Hun schrijfproducten zijn dan weer beter dan die van leerlingen uit de technische opties …”



Figuur 20.1 – Percentage leerlingen per optiegroep dat aan een bepaald globaal criterium voldoet voor de opdrachten 'Bakker' (eindterm 23) en 'Verhuisd' (eindterm 24)

Peiling wiskunde (p.32)

"…Minder leerlingen uit de technische opties bereiken de eindtermen, enkel voor 'ruimtemeetkunde' (84 procent) en 'getalinzicht' (53 procent) beheerst meer dan de helft van de leerlingen de eindtermen. Daarbij moet echter worden opgemerkt dat deze optiegroep zeer heterogeen is. Zo bereiken ongeveer evenveel leerlingen in de basisoptie industriële wetenschappen de eindtermen als in de basisoptie moderne wetenschappen. Voor een aantal eindtermen (zeker in het domein meetkunde) halen in verhouding meer leerlingen in industriële wetenschappen de eindtermen dan in moderne wetenschappen…"

Tabel 6. Percentage leerlingen dat de eindtermen beheerst per optiegroep

Domein	Toets	Klassieke talen	Moderne wetenschappen	Technische opties
Getallenleer	Getalinzicht	93	78	53
	Bewerkingen	57	30	7
Algebra	Rekenen met veeltermen	58	29	7
	Algebraïsering	82	58	37
	Evenredigheden	70	59	27
Data	Omgaan met data	78	58	30
Meetkunde	Meetkundige begripsvorming	92	68	45
	Meetkundige procedures: rekenen	67	48	24
	Meetkundige procedures: constructies	87	69	42
	Ruimtemeetkunde	97	95	84

4.4.3 Leerlingenstromen en mogelijke uitgangspunten voor differentiatie

In deze tekst buigen we ons niet over specifieke vakinhoudelijke problemen die in de breedte (over de basisopties heen) gedetecteerd zijn. We willen ons hier vooral buigen over mogelijke uitgangspunten voor een gerichte aanpak van bepaalde leerlingenstromen die via de peilingstoetsen zichtbaar worden. Hieronder maken we een oplijsting van mogelijke leerlingenstromen. Daarnaast wensen we ook *uitdagingen te formuleren voor een eventuele hervorming van het secundair onderwijs*.

Er is een leerlingenstroom die meer aan kan dan het minimale beheersingsniveau van de eindtermen. In welke mate deze leerlingen voldoende extra uitdaging krijgen, kan via de resultaten van de peilingstoetsen moeilijk gedetecteerd worden. We kunnen ons de vraag stellen of bepaalde leerlingen, ook in technisch georiënteerde basisopties, voor bv. wiskunde of talen wel voldoende uitgedaagd worden. Door het lesniveau af te stellen op een gemiddeld verwachtingspatroon zullen bepaalde leerlingen onderpresteren en daardoor kansen ontnomen worden.

Uitdaging voor de hervorming van het secundair onderwijs: alle leerlingen, los van de gekozen basisoptie (belangstellingsgebied …) met voldoende talent voor een bepaald aspect van de basisvorming voldoende uitdaging (verdieping) bieden.

Een tweede leerlingenstroom heeft op vandaag weinig of geen problemen met het behalen van het minimale niveau van de eindtermen. Uit de peilingsresultaten blijkt dat deze leerlingenstroom zich voor het grootste deel bevindt binnen de basisopties Latijn, Grieks-Latijn en Moderne wetenschappen. Ongeveer 70 % van alle leerlingen A-stroom vindt men terug in één van deze drie basisopties.

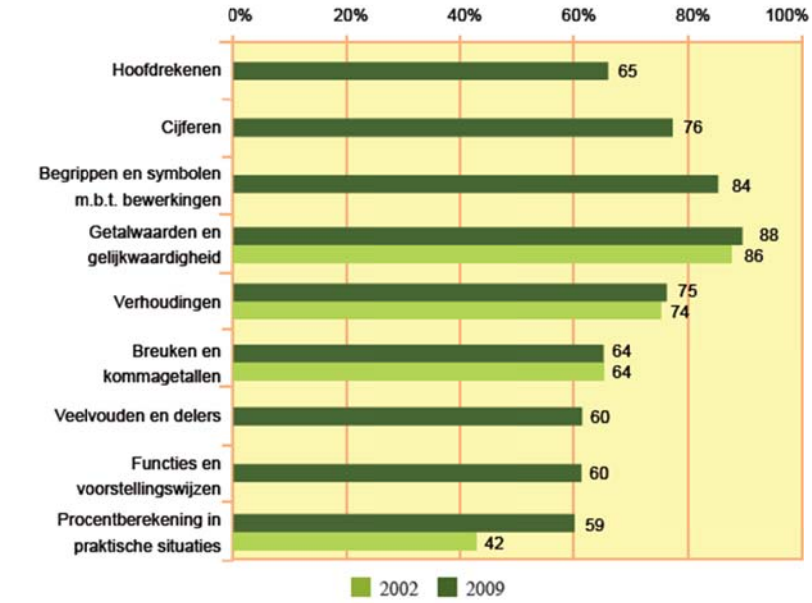
Uitdaging voor de hervorming van het secundair onderwijs: borgen wat goed is in ons huidig Vlaams onderwijs.

Er is een derde leerlingenstroom die vandaag de eindtermen niet halen maar mits voldoende remediëring wel in staat zijn om het minimale beheersingsniveau te bereiken. De remediëring kan op verschillende manieren ingevuld worden. Sommige leerlingen hebben meer tijd nodig om het minimale niveau van de basisvorming te behalen. Extra lesuren en les op een trager tempo kunnen hier een oplossing bieden. Andere leerlingen vragen een andere didactische aanpak of een andere methodiek bv. meer contextgerichte inoefening van de basisvorming. Deze leerlingenstroom bevindt zich vooral binnen de technisch georiënteerde basisopties, maar ook binnen Moderne wetenschappen zijn er heel wat leerlingen die extra ondersteuning nodig hebben.

Uitdaging voor de hervorming van het secundair onderwijs: leerlingen die op een trager tempo leren voldoende kansen bieden om de basisvorming te behalen.

4.4.4 Een aangepast traject voor leerlingen die intrinsiek niet in staat zijn om het minimale beheersingsniveau te behalen

Er is naast de drie geschetste leerlingenstromen nog een andere die zelfs via remediëring niet op het minimale beheersingsniveau van de eindtermen voor de A-stroom kan gebracht worden. Het grootste deel van deze leerlingenstroom vindt men terug in de huidige B-stroom. Een deel zal echter terug te vinden zijn in technisch georiënteerde basisopties van de A-stroom. In dit verband is de bevinding op p. 19 van de peiling biologie relevant: "… Zittenblijven komt ook meer voor bij de technische basisopties, waar bijna 30 procent van de leerlingen achter zit op leeftijd. In de klassieke talen is dit slechts drie procent…" …Hier kan de vraag gesteld worden of vele van deze leerlingen op hun plaats zitten in de A-stroom.



Figuur 17 – Percentage leerlingen dat de eindtermen beheerst voor het domein getallen en bewerkingen

Wanneer we de resultaten van de peilingstoetsen wiskunde in het basisonderwijs bekijken (een voorbeeld vind je op p.29 van de brochure tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs – zie ook figuur hierboven) dan zien we dat deze globaal genomen vrij goed zijn. Toch blijkt uit de resultaten dat ook in het basisonderwijs een deel van de leerlingen de eindtermen niet halen. Het is niet overdreven om te veronderstellen dat veel van die leerlingen in technisch georiënteerde basisopties terechtkomen. Een mogelijke oplossing bestaat in een schakelblok dat start na het vierde leerjaar van het basisonderwijs en doorloopt tot en met de eerste graad van het secundair onderwijs.

Uitdaging voor de hervorming van het secundair onderwijs: leerlingen die intrinsiek niet in staat zijn om het minimale beheersingsniveau van de eindtermen basisvorming te behalen een aangepast traject aanbieden dat reeds start in het basisonderwijs en doorloopt tot en met de eerste graad.

4.5 Hoe zit het met leerkansen voor leerlingen? Onderwijsinspectie basis- en secundair onderwijs

De onderwijs- en leeromgeving in scholen hebben een impact op het leren van leerlingen. De manier waarop de leerlingen het lesgeven, de eisen en beoordelingscriteria en ook de inhoud percipiëren, beïnvloedt onder meer hun leren. In goede omstandigheden ontstaat congruentie wanneer de leerstrategieën van de leerlingen en de onderwijsstrategieën van de lesgever compatibel zijn. ‘Onderwijs’ is ‘het geheel aan maatregelen (om gedrag te reguleren) en interventies die in een leeromgeving worden genomen om het leerproces van de lerende(n) te ondersteunen.’ ‘Onderwijs’ heeft dan ook - eenvoudig gesteld - als doel om ‘het leren van de lerende(n) zo veel mogelijk te faciliteren’.

Wetenschappelijk onderzoek geeft geregeld aan dat het belangrijk is om de beginsituatie, de interesse(s) en de motivatie van de leerling als uitgangspunten te nemen om er leerinhouden en doelen op te enten. Deze aanpak stimuleert de leergierigheid en de intrinsieke motivatie van de leerlingen. Het behoort tot de basiscompetenties van de leraar om aan te sluiten bij de leefwereld van het kind en om de leerplandoelen op een motiverende manier bij te brengen.

In de algemene uitgangspunten achter de eindtermen wordt er in beide niveaus ingegaan op deze aspecten van het leren en op de leerkansen van de leerling.

Het wiskundeonderwijs omvat een aantal oriëntaties. Met het wiskundeonderwijs streeft men er naar dat:

- *de leerlingen een aantal fundamentele wiskundige inzichten, kenniselementen en vaardigheden verwerven die nodig zijn om adequaat te functioneren in het maatschappelijk leven en/of die een noodzakelijke basis vormen voor de verdere studieloopbaan;*
- *de kinderen de taal van de wiskunde begrijpen, zowel in de wiskundelessen als daarbuiten;*
- *de kinderen een onderzoeksgerichte houding ontwikkelen die hen kan helpen bij het opsporen en het onderzoeken van allerlei wiskundige verbanden, patronen en structuren;*
- *de kinderen eigen wiskundige denk- en leerprocessen leren sturen en erover reflecteren;*
- *de kinderen een positieve en constructief-kritische houding ontwikkelen tegenover wiskunde als leergebied op school en in het algemeen.*

Als de leerlingen actief betrokken worden bij de opbouw van hun wiskundige kennis en vaardigheden, zullen zij de zin van theorievorming beter inzien. Als leerlingen ontdekken dat ze bekwaam zijn om hun groeiende wiskundekennis te gebruiken in nieuwe situaties, groeit hun vertrouwen en worden ze zelfzekerder. Vertrekken van relatief eenvoudige problemen die ze zelfstandig kunnen oplossen, moedigt hen aan om nieuwe meer complexe oefeningen aan te pakken.

Hoe zit het nu met de leerkansen voor de leerlingen? Op welke wijze trachten leraren in het basis- en secundair onderwijs tegemoet te komen aan de leerbehoeften van hun leerlingen? De onderwijsinspectie kan vanuit haar talrijke observaties van de concrete onderwijspraktijk een aantal vaststellingen en kanttekeningen naar voor brengen binnen deze discussie.

4.5.1 Vaststelling in het basisonderwijs

- In het basisonderwijs zijn leraren meestal voldoende op de hoogte van de beginsituatie van de leerlingen via formele en informele overgangsgesprekken en de analyse van informatie uit het leerlingvolgsysteem. Deze informatie bestaat onder meer uit resultaten op genormeerde, valide en betrouwbare toetsen en evaluatiegegevens uit zelfgemaakte toetsen of toetsen van een onderwijsleerpakket. In het kleuteronderwijs gebeurt dit overwegend via dagelijkse observaties.
- Richtinggevend voor het wiskundeaanbod in het basisonderwijs zijn de eindtermen en het leerplan. Beide referentiekaders bieden een passend curriculum. In het leerplan zijn de leerlijnen goed uitgewerkt vanaf de jongste kleutergroep tot en met het zesde leerjaar. Kleuters krijgen meerdere mogelijkheden om wiskundige begrippen te verwerven en ervaringen op te doen vanuit divers bronnenmateriaal. De meeste scholen gebruiken in de lagere afdeling een onderwijsleerpakket, waarvan het aanbod meestal voldoende dekkend is voor de realisatie van de leerplannen. Omdat de leraren dit pakket consequent volgen, biedt deze werkwijze een zekere garantie voor voldoende gradatie en continuïteit in het aanbod en in methodiek over de verschillende leerjaren heen.
- De aanpak in de meeste kleuter- en lagere afdelingen biedt kansen om wiskundige inzichten en vaardigheden toe te passen buiten de specifieke wiskundelessen. Illustratief zijn hiervoor de integratie van wiskundige aspecten in lessen bewegingsopvoeding in het kleuteronderwijs en de toepassing ervan binnen contexten bij wereldoriëntatie in het lager onderwijs. In meerdere scholen zijn de school- en/of klasprojecten hier ook een mooi voorbeeld van.
- Algemeen wenden leraren in het basisonderwijs de voorziene onderwijstijd voor wiskunde op weekbasis optimaal aan. Additioneel worden wiskundige doelen in het kleuteronderwijs nagestreefd via de hoekenwerking, waarbij kleuters door de aanwezige materialen en door bijkomende impulsen van de leraar worden uitgedaagd om te ‘rekenen’. Tijdens activiteiten buiten de specifieke wiskundelessen (zoals contract- en hoekenwerk) komen ook wiskundige taken (meestal verwerkingsoefeningen) in het lager onderwijs aan bod.
- In het basisonderwijs volgen de schoolteams de resultaten voor wiskunde algemeen goed op. Deze gegevens bieden leraren mogelijkheden om te reflecteren over hun onderwijsaanbod en om eventuele verbeter- en remediëringsacties op te zetten.
- De meeste basisscholen ontwikkelden de voorbije jaren een zorgcontinuüm waarin de zorgbrede en zorgverbredende werking wordt geëxpliciteerd. Naast Nederlands neemt wiskunde een centrale plaats in deze werking in. De klasleraar is hierbij algemeen de eerste verantwoordelijke. In de onderwijspraktijk komt dit tot uiting in de vrij algemeen ingeburgerde differentiatie in de verwerkingsfase. Naast het gebruik van gegevens uit periodieke evaluatiemomenten is er een positieve tendens om foutenregistraties en -analyses van toetsen te maken om het beeld van de ontwikkeling van de leerlingen te verfijnen. Deze informatie vormt de basis voor klassikale en/of individuele remediëring. De leraren wenden daarvoor vaak de mogelijkheden van het onderwijsleerpakket aan of gebruiken additionele materialen uit andere pakketten die bijkomende

remediërings- of uitbreidingsopdrachten bevatten. De tweedelijnszorg, opgenomen door het zorgteam (zorgcoördinator, zorgleraren,...), verloopt meer en meer op een planmatige wijze.

Enkele kanttekeningen

- Algemeen kunnen zowel de zorgbrede als zorgverbredende werking van basisscholen nog worden geoptimaliseerd met het oog op het creëren van passende leerkansen voor de leerlingen. De leerplangerichtheid van de organisatie van het onderwijsleerproces krijgt hierin in toenemende mate een plaats. De effectiviteit van differentiatie en remediëring wordt immers grotendeels bepaald door de mate waarin deze 'op maat van de leerling' zijn. Belangrijk is het om nog beter aan te sluiten bij de beginsituatie en de ontwikkeling van de groep én van de individuele leerlingen. Dit impliceert onder meer de optimalisering van de informatiedoorstroming, een bredere evaluatie en het gelijkgericht gebruik van fouteninventarissen en -analyses om zorgacties op leerling-, groeps- en schoolniveau te organiseren.
- Daarbij is het belangrijk om nog meer vormen van flexibele klasorganisatie te hanteren om de onderwijstijd optimaal te benutten, waardoor de leerlingen maximale leerkansen kunnen krijgen. De differentiatie beperkt zich nog veelal tot tempodifferentiatie tijdens de verwerkingsfase en/of tot uitlooptaken. Curriculumdifferentiatie en differentiatie bij de evaluatie komen nog weinig voor. Leraren durven voor sommige leerlingen nog te weinig het onderwijsleeraanbod te beperken tot de doelen en inhouden van de eindtermen, de zogenaamde basisleerstof.
- Leerlingen met nood aan extra uitdagingen krijgen vaak te weinig denkstimulerende en aanvullende leerinhouden. Deze leerlingen krijgen veelal meer of moeilijkere oefeningen, die meestal weinig uitdagend of contextueel gebonden zijn. Voor alle leerlingen is het daarnaast belangrijk om kansen te krijgen om te reflecteren over hun eigen wiskundig denk- en leerproces.
- Men maakt nog onvoldoende gebruik van de beschikbare informaticatechnologie zoals o.m. didactische software en zelfcontrolerend spelmateriaal.
- Bepaalde doelstellingen dienen in principe verworven te zijn na de tweede graad basisonderwijs (bijvoorbeeld eigenschappen in bewerkingen correct toepassen, automatiseringen van de vier hoofdbewerkingen). Indien methodes te weinig oefenkansen voorzien in de daaropvolgende jaren en wanneer leerkrachten hun methodes te 'slaafs' volgen, dreigen deze vaardigheden te weinig systematische ingeoefend of herhaald te worden. Dit geldt ook voor betekenisvolle herleidingen en afronden.
- Differentiatie wordt nog te veel gezien als een middel om verschillen te verkleinen dan als middel om effectief in te spelen op die verschillen.

4.5.2 Vaststellingen in het secundair onderwijs

- In het secundair onderwijs is het belangrijk dat de school en de individuele leraar zich op de hoogte stellen van de gegevens over de leerling met het oog op het creëren van een passend onderwijsleeraanbod en op communicatie met ouders of andere kindbetrokkenen. Er zijn heel wat secundaire scholen die expliciet rekening houden met de beginsituatie van de leerlingen door o.m. steeds te vertrekken vanuit de leerplannen en de verworvenheden in het basisonderwijs.
- Elke wiskundeleraar in het secundair onderwijs zou van elke leerling in de loop van het schooljaar voldoende moeten weten wat in zijn/haar wiskundig rugzakje zit aan (basis)kennis (= kennen), vaardigheden (= kunnen) met aandacht voor de wiskundige houding (= attitude). Dit veronderstelt een leerlinggerichte aanpak van de lesonderwerpen, een leerlingvolgsysteem en een aansluitende evaluatie. In de eerste graad doen de leraren er alles aan om de leerkansen voor hun leerlingen te verhogen. Zij schrikken er meestal niet voor terug om extra bijlessen en extra oefeningen met verbetersleutels buiten hun lesuren aan te bieden aan leerlingen die hier nood aan hebben. Om leerachterstanden weg te werken of verdiepingsoefeningen aan te bieden, maakt een groot deel van de scholen tevens gebruik van oefenmateriaal op websites of ondersteunende software.
- Er zijn scholen die expliciet vorm en inhoud geven aan competentieleren en competentiegericht evalueren door o.a. het vakdoorbrekend behandelen van sommige leerplaninhouden, het onder begeleiding zelfstandig verwerken van leerstofdelen, het aanbieden van studiesteekkaarten, formularia en verbetersleutels, evaluatie- en zelfevaluatiefiches of de organisatie van groepswerk.

Enkele kanttekeningen

- Het is een vaststelling dat niet alle leerlingen die het eerste leerjaar A aanvatten over dezelfde wiskundige voorkennis beschikken. In het eerste jaar secundair onderwijs worden scholen geconfronteerd met jongeren uit verschillende basisscholen, met verschillende achtergronden, culturen en een grote verscheidenheid aan afgelegde trajecten.

- Heel wat scholen zetten daarom binnenklasdifferentiatie als aandachtspunt voorop. Differentiatie wordt hierbij nog te veel gezien als middel om verschillen te verkleinen dan als middel om effectief in te spelen op die verschillen. Dit probleem samen met de vaak te grote lesgroepen in de eerste graad, leiden er toe dat de 'sterkere wiskundige' leerlingen soms te weinig worden uitgedaagd en de meer praktisch gerichte leerlingen te lang worden opgezadeld met contextloze mechanische oefenreeksen.
- Rekentoestellen en andere ict-toepassingen worden niet altijd efficiënt aangewend. Het gebrek aan een doordachte mix van ict- ondersteund en ict-loos werken laten een aantal extra kansen onbenut zoals:
    - het verschuiven van het rekentechnische naar het structurele en probleemoplossende aspect;
    - visualisaties en simulaties die het denkproces kunnen ondersteunen.
- Steeds meer vakgroepen starten met de toetsing van attitudes en vaardigheden, maar dikwijls reikt dit nog niet verder dan noties van stiptheid en inzet. Een specifieke invulling van attitudinale doelstellingen voor het vak wiskunde is spijtig genoeg nog dikwijls braakliggend terrein.
- De negatieve resultaten in de recente peiling zijn deels te verklaren door de wijze waarop men omgaat met het aantal beschikbare lesuren voor de verschillende leerlingengroepen (verschillende opties) die er in de eerste graad aangeboden worden. Ondanks het feit dat de lessentabellen niet langer opgelegd worden door de overheid, doen weinig scholen aan tempodifferentiatie via het investeren in extra lestijden voor het langzamer uitwerken van de basisvorming. Naast deze mogelijkheid van tempodifferentiatie stellen we globaal vast dat allerlei vormen van curriculumdifferentiatie nog te weinig aan bod komen. Dit hangt dikwijls samen met het handboek dat wordt gevolgd.
- Een aantal scholen in het secundair onderwijs hevelen nog steeds lesuren over van de eerste graad naar de tweede en derde graad. Het gevolg is soms grote lesgroepen die (1) een rem zetten op een vlotte leerplanrealisatie, (2) het implementeren van alternatieve werkvormen en evaluatievormen bemoeilijken en (3) een extra hindernis zijn bij het invullen van de brugfunctie van de eerste graad tussen het basisonderwijs en de tweede en de derde graad secundair onderwijs.
- Uit doorlichtingsverslagen blijkt dat de leerplanrealisatie niet altijd volledig is of niet evenwichtig wordt benaderd. Vaak is de eindleerstof onvoldoende verwerkt. Een aantal eindtermen worden in een derde van de onderzochte scholen vaak niet gezien. Het gaat hier o.m. over de evenredigheden en het werken met grafieken en diagrammen. Dit zijn juist eindtermen die veel mogelijkheden bieden om leerlingen uit te dagen via allerlei toepassingen.
- De voorziene evaluatietijd staat nog te dikwijls in wanverhouding tot de instructietijd. Evaluatie wordt niet altijd gebruikt voor bijsturing van het leerproces.

4.5.3 Vaststellingen bij de overgang van basis- naar secundair onderwijs

- Wij stellen vast dat voor leraren betrokken bij de overgang van het basis- naar het secundair onderwijs het ontbreken van de kennis over de visie, basisprincipes en concrete doelen van de ontwikkelingsdoelen, eindtermen en/of leerplannen van het vorige of volgende onderwijsniveau een rem plaatst op de bijdrage tot de kwaliteit, de doelgerichtheid en de onderlinge afstemming van hun onderwijsleeraanbod en -proces.
- Dit geldt eveneens voor het gemis aan nauwere contacten tussen basis- en secundaire scholen als bijdrage tot de verfijning van de beeldvorming bij de overgang van de leerlingen. Het gaat hier over de ontwikkeling van procedures om de leerlingenresultaten (voor wiskunde) met elkaar te communiceren, te analyseren en aan te wenden om het eigen onderwijsleeraanbod en -proces te optimaliseren, de overgang voor leerlingen te versoepelen én om nog sterker rekening te houden met de individuele beginsituatie van de leerlingen.
- Wij stellen vast dat de overgang van het basis- naar het secundair onderwijs plaats vindt op een moment dat de leerling zelf ingrijpende veranderingen ondergaat (lichamelijk, cognitief, psychologisch, sociaal) en dat dit een invloed heeft op de motivatie.
- Voor beide niveaus zien we dat de heterogeniteit van de groep onvoldoende positief wordt aangewend om van en met elkaar te leren.

4.5.4 Aanbevelingen

Het is ondertussen gemeengoed dat scholen over de niveaus heen veel inspanningen leveren om de leerkansen voor hun leerlingen te vergroten. Globaal gezien staat het basisonderwijs hier verder dan het secundair onderwijs.

Toch stellen we vast dat veel van deze inspanningen over de niveaus heen nog doelgerichter kunnen.

Deze doelgerichtheid speelt op verschillende terreinen.

- In beide niveaus bieden de studie van onder meer de visie, basisprincipes en concrete doelen van de ontwikkelingsdoelen, eindtermen en/of leerplannen en de verdieping in de rekendidactiek en het rekenleerproces nog heel wat kansen tot verdere professionalisering van het lerarenkorps;
- Het functioneel gebruik van de actuele informatietechnologie om enerzijds het rekentechnische aspect op te vangen en anderzijds de mogelijkheden van visualisatie en simulatie uitdagend aan te wenden om de vele wiskundige denkprocessen inzichtelijk te ondersteunen, blijft nog te vaak onbenut;
- De principes van tempo- en curriculumdifferentiatie kunnen nog efficiënter beter ingezet worden om de ‘sterkeren’ en de ‘zwakkeren’ te blijven uitdagen en hun maximale leerkansen op maat aan te bieden;
- De ingesteldheid om via diepgaande overlegmomenten over de niveaus heen van elkaar te leren, om zicht te krijgen op de begin- en eindsituatie van de leerlingen en zo de continuïteit in de verschillende leerlijnen te verzekeren, zou best een formeler karakter krijgen.

Bijlage - Overzicht van de getoetste eindtermen en ontwikkelingsdoelen

Deze bijlage bevat een overzicht van alle eindtermen en ontwikkelingsdoelen die getoetst werden in de drie wiskundepeilingen. De eindtermen en ontwikkelingsdoelen werden geordend per toets. Daarbij werden de toetsen van de peiling in het basisonderwijs als vertrekpunt genomen (linkerkolom). Per rij werden de ontwikkelingsdoelen van de B-stroom van de eerste graad (middenkolom) en de eindtermen van de A-stroom (rechterkolom) geplaatst naast de eindtermen basisonderwijs waarmee ze overeenstemmen of waarop ze verderbouwen.

Er is echter geen 1-1 relatie tussen de toetsen met eindtermen/ontwikkelingsdoelen van de eerste graad en de toetsen met bijhorende eindtermen van het basisonderwijs. Zo bestaat de toets ‘schaal’ van de B-stroom enerzijds uit ontwikkelingsdoelen die overeenstemmen met eindtermen van de toets ‘verhoudingen’ van het basisonderwijs en anderzijds uit ontwikkelingsdoelen die overeenstemmen met de eindtermen van de toets ‘ruimte en ruimtelijke oriëntatie’ in het basisonderwijs. In het overzicht werd dus soms een deel van een toets of eindterm/ontwikkelingsdoel van de eerste graad gekoppeld aan twee of meer verschillende toetsen van het basisonderwijs. In dat geval staat ‘(deel)’ achter de naam van de ‘gesplitste’ toets van de eerste graad.

Hieronder wordt eerst een overzicht gegeven van de toets(delen) uit A- en de B-stroom van de eerste graad die horen bij bepaalde toetsen basisonderwijs. Er zijn 3 aparte tabellen gemaakt:

- een tabel met toetsen over het domein ‘getalinzicht, bewerkingen, algebra en omgaan met data,
- een tabel met toetsen over het domein ‘meten en meetkunde’
- een tabel met toetsen over het domein ‘strategieën en probleemoplossende vaardigheden’

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs 1e graad A-stroom**
▪ Hoofdrekenen ▪ Cijferen ▪ Snelrekenen	▪ Hoofdbewerkingen	▪ Bewerkingen (deel)
▪ Begrippen en symbolen met betrekking tot bewerkingen		▪ Bewerkingen (deel)
▪ Getalwaarden en gelijkwaardigheid	▪ Getalinzicht	▪ Getalinzicht ▪ Meetkundige procedures: constructies (deel)
▪ Verhoudingen	▪ Functioneel rekenen in praktische situaties (deel) ▪ Schaal (deel)	▪ Evenredigheden ▪ Meetkundige procedures: rekenen (deel)
▪ Breuken en kommagetallen	▪ Breuken optellen en aftrekken ▪ Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)	▪ Bewerkingen (deel)
▪ Veelvouden en delers		
▪ Functies en voorstellingswijzen	▪ Tabellen, grafieken, diagrammen en gemiddelde	▪ Omgaan met data
▪ Procentberekeningen in praktische situaties	▪ Zakrekenmachine ▪ Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)	▪ Bewerkingen (deel)
		▪ Rekenen met veeltermen
		▪ Algebraïsering

METEN EN MEETKUNDE		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs 1e graad A-stroom**
▪ Begrippen en symbolen met betrekking tot maateenheden ▪ Maten in betekenisvolle situaties	▪ Begrijpen en meten van grootheden	▪ Meetkundige procedures: rekenen (deel)
▪ Begrippen en symbolen met betrekking tot meetkunde	▪ Visualiteit en percepto-motoriek (deel), ▪ Lijnen en hoeken ▪ Vlakke figuren en ruimtelijke figuren herkennen, classificeren en tekenen	▪ Meetkundige procedures: constructies (deel) ▪ Meetkundige begripsvorming ▪ Ruimtemeetkunde (deel)
▪ Ruimte en ruimtelijke oriëntatie	▪ Visualiteit en percepto-motoriek (deel) ▪ Schaal (deel)	▪ Ruimtemeetkunde (deel)
▪ Rekenen met geld en kloklezen	▪ Geld	
▪ Omtrek, oppervlakte en inhoud	▪ Berekenen van omtrek, oppervlakte en inhoud	▪ Meetkundige procedures: rekenen (deel)
▪ Betekenisvolle herleidingen	▪ Rekenen met grootheden	

STRATEGIEEN EN PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs 1E graad B-stroom**	**Secundair onderwijs 1e graad A-stroom**
▪ Afronden, benaderen en schatten	▪ Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)	▪ Bewerkingen (deel)
▪ Referentiepunten		
▪ Probleemoplossen bij meten en meetkunde		
▪ Probleemoplossen bij getallen en bewerkingen		

Deze tabellen worden hieronder in grote overzichtstabellen aangevuld met de betrokken eindtermen/ontwikkelingsdoelen per toets.

Dit overzicht illustreert de samenhang in het wiskundecurriculum en tussen de peilingstoetsen. Deze indeling is zeker niet sluitend. Er zijn eindtermen/ontwikkelingsdoelen die met goede argumenten ook op een andere plaats konden staan.

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
Hoofdrekenen **ET1.1** kunnen tellen en terugtellen met eenheden, tweetallen, vijftallen en machten van tien. **ET1.13** voeren opgaven uit het hoofd uit waarbij ze een doelmatige oplossingsweg kiezen op basis van inzicht in de eigenschappen van bewerkingen en in de structuur van getallen: ▪ optellen en aftrekken tot honderd ▪ optellen en aftrekken met grote getallen met eindnullen ▪ vermenigvuldigen met en delen naar analogie met de tafels. **ET1.14** kunnen op concrete wijze de volgende eigenschappen van bewerkingen verwoorden en toepassen: van plaats wisselen, schakelen, splitsen en verdelen. **Cijferen** **ET1.24** kennen de cijferalgoritmen. Zij kunnen cijferend vier hoofdbewerkingen uitvoeren met natuurlijke en met kommagetallen: ▪ optellen met max. 5 getallen: de som < 10 000 000 ▪ aftrekken: aftrektal < 10 000 000 en max. 8 cijfers ▪ vermenigvuldigen: vermenigvuldiger bestaat uit max. 3 cijfers; het product = max. 8 cijfers (2 cijfers na de komma); ▪ delen: deler bestaat uit max. 3 cijfers; quotiënt max. 2 cijfers na de komma	**Hoofdbewerkingen** **OD 7** hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen maken, met inbegrip van de nulmoeilijkheid. **OD 9** hoofdbewerkingen met een decimaal getal en een natuurlijk getal maken.	**Bewerkingen (deel)** **ET2a** kennen de tekenregels bij gehele getallen. **ET6** passen afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toe. **ET7** voeren de hoofdbewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) correct uit in de verzamelingen van de natuurlijke, de gehele en de rationale getallen. **ET8** rekenen handig door gebruik te maken van eigenschappen en rekenregels van bewerkingen. **ET11** berekenen machten met grondtal 10 en 2 met gehele exponent. Zij passen hierop rekenregels van machten toe.

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
Snelrekenen **ET1.10** De leerlingen zijn in staat tot een onmiddellijk geven van correcte resultaten bij optellen en aftrekken tot 10, bij tafels van vermenigvuldiging tot en met de tafels van 10 en de bijhorende deeltafels.		
Begrippen en symbolen met betrekking tot bewerkingen **ET1.3** kennen de betekenis van: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, veelvoud, deler, gemeenschappelijke deler, grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijk veelvoud, procent, som, verschil, product, quotiënt en rest. Zij kunnen correcte voorbeelden geven en kunnen verwoorden in welke situatie ze dit handig kunnen gebruiken. **ET1.6** kunnen volgende symbolen benoemen, noteren en hanteren: = ≠ < >+ - x . : / ÷ % en ( ) in bewerkingen **ET1.11** hebben inzicht in de relaties tussen de bewerkingen.		**Bewerkingen (deel)** **ET3a** weten dat de eigenschappen van de bewerkingen in de verzameling van de natuurlijke getallen geldig blijven en kunnen worden uitgebreid in de verzamelingen van de gehele getallen. **ET5** hanteren de gepaste terminologie in verband met bewerkingen: optelling, som, termen van een som, aftrekking, verschil, vermenigvuldiging, product, factoren van een product, deling, quotiënt, deeltal, deler, rest, percent, kwadraat, vierkantswortel, macht, grondtal, exponent, tegengestelde, omgekeerde, absolute waarde, gemiddelde. **ET15** kunnen het verband uitleggen tussen optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
Getalwaarden en gelijkwaardigheid **ET1.5** kunnen natuurlijke getallen van maximaal 10 cijfers en kommagetallen (met 3 decimalen), eenvoudige breuken, eenvoudige procenten lezen, noteren, ordenen en op een getallenlijn plaatsen. **ET1.18** kunnen in eenvoudige gevallen de gelijkwaardigheid tussen kommagetallen, breuken en procenten vaststellen en verduidelijken door omzettingen.	**Getalinzicht** **OD 6** inzicht in de relatie tussen breuk, decimaal getal en percent.	**Getalinzicht** **ET1** kunnen natuurlijke, gehele en rationale getallen associëren met realistische en betekenisvolle contexten. **ET4** onderscheiden en begrijpen de verschillende notaties van rationale getallen (breuk- en decimale notatie). **ET10** ordenen getallen en gebruiken de gepaste symbolen (≤, <, ≥, >, =, ≠). **ET14** interpreteren een rationaal getal als een getal dat de plaats van een punt op een getallenas bepaalt. **Meetkundige procedures: constructies (deel)** **ET38** bepalen punten in het vlak door middel van coördinaten.
Verhoudingen **ET1.21** zijn in staat in concrete situaties (onder meer tussen grootheden) eenvoudige verhoudingen vast te stellen, te vergelijken, hun gelijkwaardigheid te beoordelen en het ontbrekend verhoudingsgetal te berekenen. **ET2.4a** kunnen de functie van de begrippen "schaal" aan de hand van concrete voorbeelden verwoorden.	**Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)** **OD 13** met verhoudingen en percenten in praktische situaties werken. **Schaal (deel)** **OD 47** hebben inzicht in het schaalbegrip.	**Evenredigheden** **ET16** herkennen het recht evenredig en omgekeerd evenredig zijn van twee grootheden in tabellen en in het dagelijkse leven. **ET24** kunnen vanuit tabellen recht evenredige verbanden met formules uitdrukken. **ET39** stellen recht evenredige verbanden tussen grootheden grafisch voor. **Meetkundige procedures: rekenen (deel)** **ET33** gebruiken het begrip schaal om afstanden in meetkundige figuren te berekenen.

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs – 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs – 1e graad A-stroom**
Breuken en kommagetallen **ET1.4** in voorbeelden herkennen dat breuken kunnen uitgelegd worden als: een stuk (deel) van, een verhouding, een verdeling,een deling, een vermenigvuldigingsfactor (operator), een getal (met een plaats op een getallenlijn), weergave van een kans. De leerlingen kunnen volgende terminologie hanteren: stambreuk, teller, noemer, breukstreep, gelijknamig, gelijkwaardig. **ET1.22** kunnen eenvoudige breuken gelijknamig maken in functie van het optellen en aftrekken van breuken of in functie van het ordenen en het vergelijken van breuken. **ET1.23** kunnen in een zinvolle context eenvoudige breuken en kommagetallen optellen en aftrekken. In een zinvolle context kunnen zij eveneens een eenvoudige breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal.	**Breuken optellen en aftrekken** **OD 8** breuken optellen en aftrekken waarbij het resultaat een breuk is met een noemer kleiner dan of gelijk aan 16. **Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)** **OD 10** de hoofdbewerkingen in verschillende situaties toepassen. **OD 12a** een rekenopgave oplossen. **OD 13** met verhoudingen en percenten in praktische situaties werken.	**Bewerkingen (deel)** **ET2b** kennen de tekenregels bij rationale getallen. **ET3b** weten dat de eigenschappen van de bewerkingen in de verzameling van de natuurlijke getallen geldig blijven en kunnen worden uitgebreid in de verzamelingen van de rationale getallen. **ET6** passen afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toe. **ET7** voeren de hoofdbewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) correct uit in de verzamelingen van de natuurlijke, de gehele en de rationale getallen. **ET8** rekenen handig door gebruik te maken van eigenschappen en rekenregels van bewerkingen. **ET11** berekenen machten met grondtal 10 en 2 met gehele exponent. Zij passen hierop rekenregels van machten toe.
Veelvouden en delers **ET1.12** kunnen orde en regelmaat ontdekken in getallenpatronen onder meer om te komen tot de kenmerken van deelbaarheid door 2, 3, 5, 9, 10 en die te kunnen toepassen. **ET1.19** kunnen de delers van een natuurlijk getal (≤100) vinden; zij kunnen van twee dergelijke getallen de (grootste) gemeenschappelijke deler(s) vinden.		

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
ET1.20 kunnen de veelvouden van een natuurlijk getal (≤20) vinden, zij kunnen van twee dergelijke getallen het (kleinste) gemeenschappelijk veelvoud vinden.		
Functies en voorstellingswijzen **ET1.2** kunnen de verschillende functies van natuurlijke getallen herkennen en verwoorden. **ET1.7** kunnen door het geven van een paar voorbeelden uit hun eigen leefwereld en in hun leermateriaal aantonen dat doorheen de geschiedenis en ook in niet-westerse culturen andere wiskundige systemen met betrekking tot getallen werden en worden beoefend. **ET1.8** kunnen gevarieerde hoeveelheidsaanduidingen lezen en interpreteren. **ET2.4b** kunnen de functie van de begrippen "gemiddelde" aan de hand van concrete voorbeelden verwoorden	**Tabellen, grafieken, diagrammen en gemiddelde** **OD 45a** informatie halen uit grafieken, tabellen, diagrammen, kaarten en schaalmodellen. **OD 48** kunnen een rekenkundig gemiddelde berekenen.	**Omgaan met data** **ET17** kunnen vanuit tabellen met cijfergegevens het rekenkundig gemiddelde en de mediaan (voor niet-gegroepeerde gegevens) berekenen en hieruit relevante informatie afleiden. **ET25** kunnen functioneel gebruik maken van eenvoudige schema's, figuren, tabellen en diagrammen.
Procentberekeningen in praktische situaties **ET1.25** kunnen eenvoudige procentberekeningen maken met betrekking tot praktische situaties.	**Zakrekenmachine** **OD 14** met een zakrekenmachine optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. **OD 16** met een zakrekenmachine een percent nemen van een getal. **Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)** **OD 13** met verhoudingen en percenten in praktische situaties werken.	**Bewerkingen (deel)** **ET13** gebruiken procentberekeningen in zinvolle contexten.

GETALINZICHT, BEWERKINGEN, ALGEBRA EN OMGAAN MET DATA		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
		Rekenen met veeltermen **ET19** kunnen twee- en drietermen optellen en vermenigvuldigen en het resultaat vereenvoudigen. **ET20** kennen de formules voor de volgende merkwaardige producten: $(a+b)^2$ en $(a+b)(a-b)$; ze kunnen ze verantwoorden en in beide richtingen toepassen. **ET21** kunnen vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende oplossen.
		Algebraïsering **ET18** gebruiken letters als middel om te veralgemenen en als onbekenden. **ET22** kunnen eenvoudige vraagstukken die te herleiden zijn tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen. **ET23** ontdekken regelmaat in eenvoudige patronen en schema's en kunnen ze beschrijven met formules.

METEN EN MEETKUNDE		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs – 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs – 1e graad A-stroom**
Begrippen en symbolen met betrekking tot maateenheden **ET2.1** kennen de belangrijkste grootheden en maateenheden met betrekking tot lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht (massa), tijd, snelheid, temperatuur en hoekgrootte en ze kunnen daarbij de relatie leggen tussen de grootheid en de maateenheid. **ET2.2** kennen de symbolen, notatiewijzen en conventies bij de gebruikelijke maateenheden en kunnen meetresultaten op veelzijdige wijze noteren en op verschillende wijze groeperen. **ET2.5** weten dat bij temperatuurmeting 0 °C het vriespunt is en weten dat de temperaturen beneden het vriespunt met een negatief getal worden aangeduid. **Maten in betekenisvolle situaties** **ET2.3** kunnen veel voorkomende maten in verband brengen met betekenisvolle situaties.	**Begrijpen en meten van grootheden** **OD18** kunnen twee of meer gelijksoortige objecten vergelijken en ordenen zonder gebruik te maken van een maateenheid. **OD19** kennen de begrippen omtrek, oppervlakte, volume, inhoud, massa, tijd, temperatuur en hoekgrootte. **OD20** kennen de belangrijkste eenheden en kunnen de symbolen daarvan juist gebruiken. **OD23** kunnen bij een meetopdracht op een verantwoorde manier een keuze maken tussen instrumenten. **OD24** kunnen grootheden meten en berekenen.	**Meetkundige procedures: rekenen (deel)** **ET32** kiezen geschikte eenheden en instrumenten om afstanden en hoeken te meten of te construeren met de gewenste nauwkeurigheid.
	Visualiteit en percepto-motoriek (deel) **OD2** figuren herkennen, aanvullen, samenstellen en ordenen. **OD3** een tweedimensionele tekening verkleind, vergroot tekenen met behulp van een raster. **OD4** een tweedimensionele tekening spiegelen om een verticale en een horizontale as met behulp van een raster.	**Meetkundige procedures: constructies (deel)** **ET35** kunnen: ▪ het beeld bepalen van een eenvoudige vlakke meetkundige figuur door een verschuiving, spiegeling, draaiing; ▪ symmetrieassen van vlakke figuren bepalen; ▪ loodlijnen, middelloodlijnen en bissectrices construeren.

<table>
<tr><th colspan="3">METEN EN MEETKUNDE</th></tr>
<tr><th>Basisonderwijs</th><th>Secundair onderwijs – 1e graad B-stroom</th><th>Secundair onderwijs – 1e graad A-stroom</th></tr>
<tr>
<td><u>Begrippen en symbolen met betrekking tot meetkunde</u>

ET3.2 op basis van volgende eigenschappen de volgende meetkundige objecten herkennen en benoemen:
▪ in het vlak: punten, lijnen, hoeken en vlakke figuren (driehoeken, vierhoeken, cirkels)
▪ in de ruimte: veelvlakken (kubus, balk, piramide) en bol en cilinder.

ET3.3 de symbolen van de loodrechte stand en van de evenwijdigheid lezen en noteren.

ET3.4 kunnen de verschillende soorten hoeken classificeren en de verschillende soorten vierhoeken classificeren op grond van zijden en hoeken. Zij kunnen deze ook concreet vormgeven.

ET3.5 kunnen met een passer een cirkel tekenen.

ET3.6 kunnen de begrippen symmetrie, gelijkvormigheid en gelijkheid ontdekken in de realiteit. Ze kunnen zelf eenvoudige geometrische figuren maken.</td>
<td><u>Lijnen en hoeken</u>

OD26 kunnen een lijnstuk tekenen.

OD27 kunnen de lengte nauwkeurig meten.

OD28 herkennen de onderlinge stand van rechten en kunnen rechten tekenen waarvan de onderlinge stand beschreven is.

OD29 de elementen van een hoek aanduiden en benoemen.

OD30 de hoeken aanduiden en rubriceren (nulhoek, scherpe hoek, rechte hoek, stompe hoek, gestrekte hoek, volle hoek).

OD31 hoeken meten en tekenen.

<u>Vlakke figuren en ruimtelijke figuren herkennen, classificeren en tekenen</u>

OD32 figuren indelen in vlakke figuren en ruimtelijke figuren.

OD33 vlakke figuren indelen in veelhoeken en figuren die geen veelhoeken zijn.

OD34 veelhoeken classificeren volgens het aantal hoeken en zijden.

OD35 driehoeken classificeren met als criteria het aantal gelijke zijden of hoeken.

OD36 driehoeken tekenen, waarvan een aantal voorwaarden in verband met gelijkheid van zijden of hoeken gegeven zijn.

OD40 een cirkel tekenen.</td>
<td><u>Meetkundige begripsvorming</u>

ET26 kennen en gebruiken de meetkundige begrippen diagonaal, bissectrice, hoogtelijn, middelloodlijn, straal, middellijn, overstaande hoeken, nevenhoeken, aanliggende hoeken, middelpuntshoeken.

ET27 herkennen evenwijdige stand, loodrechte stand en symmetrie in vlakke figuren en ze herkennen gelijkvormigheid en congruentie tussen vlakke figuren.

ET28 herkennen figuren in het vlak, die bekomen zijn door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.

ET31 kennen meetkundige eigenschappen zoals: de hoekensom in driehoeken en vierhoeken, eigenschappen van gelijkzijdige en gelijkbenige driehoeken, eigenschappen van zijden, hoeken en diagonalen in vierhoeken.

ET37 beschrijven en classificeren de soorten driehoeken en de soorten vierhoeken aan de hand van eigenschappen.

ET40 begrijpen een gegeven eenvoudige redenering of argumentatie in verband met eigenschappen van meetkundige figuren.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">METEN EN MEETKUNDE</th></tr>
<tr><th>Basisonderwijs</th><th>Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom</th><th>Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom</th></tr>
<tr><td></td><td>OD37 vierhoeken classificeren met als criteria het aantal gelijke zijden, aantal paren evenwijdige zijden, aantal gelijke hoeken, eigenschappen van de diagonalen.

OD38 vierhoeken tekenen, waarvan een aantal voorwaarden in verband met gelijkheid van zijden of hoeken gegeven zijn.

OD42 herkennen een kubus en een balk.

OD43 herkennen een piramide, cilinder, kegel en bol.</td><td><u>Ruimtemeetkunde</u> (deel)

ET30 herkennen kubus, balk, recht prisma, cilinder, piramide, kegel en bol aan de hand van een schets, tekening en dergelijke.</td></tr>
<tr><td><u>Ruimte en ruimtelijke oriëntatie</u>

ET3.1 begrippen en notaties waarmee de ruimte meetkundig wordt bepaald aan de hand van concrete voorbeelden verklaren.

ET3.7 zijn in staat:
▪ zich ruimtelijk te oriënteren op basis van plattegronden, kaarten, foto's en gegevens over afstand en richting.
▪ zich in de ruimte mentaal te verplaatsen en te verwoorden wat ze dan zien.</td><td><u>Visualiteit en percepto-motoriek</u> (deel)

OD5 een ontwikkeling maken van een driedimensioneel lichaam.

<u>Schaal</u> (deel)

OD45b kunnen informatie halen uit kaarten en schaalmodellen.

OD46 kunnen met plattegronden en plan werken.

OD49 kunnen met tekeningen en modellen op schaal werken.</td><td><u>Ruimtemeetkunde</u> (deel)

ET29 weten dat in een tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale situatie, informatie verloren gaat.

ET36 kunnen zich vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur met behulp van allerlei concreet materiaal.</td></tr>
</table>

METEN EN MEETKUNDE		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
Rekenen met geld en kloklezen **ET2.11** in reële situaties rekenen met geld en geldwaarden. **ET2.12** kloklezen (analoge en digitale klokken). Zij kunnen tijdsintervallen berekenen en zij kennen de samenhang tussen seconden, minuten en uren.	**Geld** **OD50** in reële situaties rekenen met geld.	
Omtrek, oppervlakte en inhoud **ET2.9** op een concrete wijze aangeven hoe ze de oppervlakte en de omtrek van een willekeurige, vlakke figuur en van een veelhoek kunnen bepalen. **ET2.10** concreet aangeven hoe de inhoud van een balk wordt bepaald.	**Berekenen van omtrek, oppervlakte en inhoud** **OD39** de omtrek en oppervlakte van een driehoek, vierkant en een rechthoek berekenen. **OD41** met gegeven formule de omtrek en oppervlakte van een cirkel berekenen. **OD44** kunnen met gegeven formule de inhoud van een kubus en een balk berekenen.	**Meetkundige procedures: rekenen (deel)** **ET34** berekenen de omtrek en oppervlakte van driehoek, vierhoek en cirkel en de oppervlakte en het volume van kubus, balk en cilinder.
Betekenisvolle herleidingen **ET2.6** allerlei verbanden, patronen en structuren tussen en met grootheden en maatgetallen inzien en ze kunnen betekenisvolle herleidingen uitvoeren. **ET2.7** met de gebruikelijke maateenheden betekenisvolle herleidingen uitvoeren.	**Rekenen met grootheden** **OD21** zien het verband tussen de verandering in de eenheid en de verandering bij het maatgetal bij herleidingen. **OD21** eenvoudige vraagstukken in verband met omtrek, oppervlakte, inhoud, massa, tijd, temperatuur en hoekgrootte oplossen. **OD24b** kunnen grootheden meten en berekenen.	

STRATEGIEEN EN PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
Afronden, benaderen en schatten **ET1.15** zijn in staat getallen af te ronden. De graad van nauwkeurigheid wordt bepaald door het doel van het afronden en door de context. **ET1.16** kunnen de uitkomst van een berekening bij benadering bepalen. **ET1.17** kunnen schatprocedures vinden bij niet exact bepaalde of niet exact te bepalen gegevens.	**Functioneel rekenen in praktische situaties (deel)** **OD11** grootheden en resultaten van bewerkingen schatten en zinvol afronden.	**Bewerkingen (deel)** **ET12** kunnen: ▪ de uitkomst van een bewerking schatten; ▪ een resultaat oordeelkundig afronden.
Referentiepunten **ET2.8** schatten met behulp van referentiepunten.		
Probleemoplossen bij meten en meetkunde **ET1.29*** zijn bereid verstandige zoekstrategieën aan te wenden die helpen bij het aanpakken van wiskundige problemen met betrekking tot meten, ruimtelijke oriëntatie en meetkunde. **ET4.1** kunnen met concrete voorbeelden aantonen dat er voor hetzelfde wiskundig probleem met betrekking tot meten, meetkunde en ruimtelijke oriëntatie, soms meerdere oplossingswegen zijn en soms zelfs meerdere oplossingen mogelijk zijn afhankelijk van de wijze waarop het probleem wordt opgevat. **ET4.2** zijn in staat om de geleerde begrippen, inzichten, procedures, met betrekking tot meten en meetkunde, zoals in de respectieve eindtermen vermeld, efficiënt te hanteren in betekenisvolle toepassingssituaties, zowel binnen als buiten de klas.		

STRATEGIEEN EN PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
ET4.3 kunnen met concrete voorbeelden uit hun leefwereld aangeven welke de rol en het praktisch nut van wiskunde is in de maatschappij. **ET5.2*** ontwikkelen een kritische houding ten aanzien van allerlei cijfermateriaal, tabellen, berekeningen waarvan in hun omgeving bewust of onbewust, gebruik (misbruik) gemaakt wordt om mensen te informeren, te overtuigen, te misleiden ...		
Probleemoplossen bij getallen en bewerkingen **ET1.29*** zijn bereid verstandige zoekstrategieën aan te wenden die helpen bij het aanpakken van wiskundige problemen met betrekking tot getallen. **ET4.1** kunnen met concrete voorbeelden aantonen dat er voor hetzelfde wiskundig probleem met betrekking tot getallen, soms meerdere oplossingswegen zijn en soms zelfs meerdere oplossingen mogelijk zijn afhankelijk van de wijze waarop het probleem wordt opgevat. **ET4.2** zijn in staat om de geleerde begrippen, inzichten, procedures, met betrekking tot getallen zoals in de respectievelijke eindtermen vermeld, efficiënt te hanteren in betekenisvolle toepassingssituaties, zowel binnen als buiten de klas. **ET4.3** kunnen met concrete voorbeelden uit hun leefwereld aangeven welke de rol en het praktisch nut van wiskunde is in de maatschappij.		

STRATEGIEEN EN PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN		
Basisonderwijs	**Secundair onderwijs - 1e graad B-stroom**	**Secundair onderwijs - 1e graad A-stroom**
ET5.2* ontwikkelen een kritische houding ten aanzien van allerlei cijfermateriaal, tabellen, berekeningen waarvan in hun omgeving bewust of onbewust, gebruik (misbruik) gemaakt wordt om mensen te informeren, te overtuigen, te misleiden ...		

Samenstelling
Vlaamse overheid
Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming
Afdeling Projecten: EVC – Curriculum – Kwalificaties

Tekst
Jos Willems
Veerle Verhaegen
Els Ver Eecke
Marleen Wouters

Met bijdragen van
Orhan Agirdag
Emile Claeys
Fien Depaepe
Erik De Corte
Marleen Duerloo
Wendy Luyckx
Onderwijsinspectie
Michel Roelens
Bruno Sagaert
Anne Schatteman
Walter Van Dam
Els Van Emelen
Maggy Van Hoof
Mieke Van Houtte
Wim Van Dooren
Lieven Verschaffel

Verantwoordelijke uitgever
Ann Verhaegen
Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming
Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming
Koning Albert II-laan 15
1210 Brussel

Foto's voorpagina
Veerle Verhaegen

Grafische Vormgeving
Chris Van den Vreken

Druk
Departement Onderwijs en Vorming
Management Ondersteunende Diensten
Copycenter

Uitgave
2010